سلسلۂ نصابات علمیہ جامعہ عثمانیہ

علم ہندسۂ مستوی

(برائے انٹرمیڈیٹ)

تالیف

شیخ برکت علی صاحب ایم۔اے

و

محمد خواجہ محی الدین صاحب ایم۔اے

۱۳۵۵ھ م ۱۳۴۶ف م ۱۹۳۶ء

دارالطبع جامعہ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

فہرستِ مضامین

(علم ہندسۂ مستوی)

مضمون	صفحہ
پہلا باب - تمہید	۱
دوسرا باب - نسبت وتناسب	۶
مسئلہ ۱	۱۱
مسئلہ ۲	۲۳
مسئلہ ۳	۳۰
مسئلہ ۴	۳۳
مسئلہ ۵	۴۲
مسئلہ ۶	۴۷
مسئلہ ۷	۵۰
تیسرا باب - مثلث کے خواص	۵۱
مسئلہ ۸	۵۵
مسئلہ ۹	۵۷

مضمون	صفحہ
مسئلہ ۱۰	۶۲
مسئلہ ۱۱	۶۶
مسئلہ ۱۲	۷۳
چوتھا باب - دائروں کے خواص	۷۶
مسئلہ ۱۳	۷۷
مسئلہ ۱۴	۸۰
مسئلہ ۱۵	۸۸
مسئلہ ۱۶	۹۵
مسئلہ ۱۷	۱۰۲
پانچواں باب - دائروں کا بنانا۔	۱۰۴
مسئلہ ۱۸	۱۰۵
مسئلہ ۱۹	۱۱۰
چھٹا باب - اعظم اقل	۱۱۳
مسئلہ ۲۰	۱۲۱
ساتواں باب - چلیپی نسبت موسیقی صف اور موسیقی پنسل	۱۲۳
مسئلہ ۲۱	۱۲۵
مسئلہ ۲۲	۱۳۷

علمِ ہندسۂ مستوی

ہندسۂ مستوی کا یہ مختصر رسالہ حسب تصفیہ مجلس نصاب ریاضی جامعۂ عثمانیہ کی انٹرمیڈیئیٹ کی جماعتوں کے لیے تالیف کیا گیا ہے۔ جہاں تک ممکن تھا ہندسۂ مستوی کے معیّنہ نصاب جدید کو ملحوظ رکھتے ہوئے اس رسالہ کو اپنی حدود کے اندر مکمل بنانے کی کوشش کی گئی ہے۔ اس مقصد کی تکمیل کے لیے چند دفعات جو علامت ⁎ سے نشان زد کی گئی ہیں مضمون کے تسلسل کو قائم رکھنے کے لیے نصاب سے زائد درج کی گئی ہیں مگر یہ دفعات ایسی ہیں کہ تقریباً جملہ طلباء ان کو آسان اور دلچسپ پائینگے۔

مناسب مشقوں کے انتخاب کی غرض سے متعدّد مستند انگریزی کتابوں سے استفادہ کیا گیا ہے۔ مسائل پر مکمل طور پر حاوی ہونے کے لیے یہ ضروری ہے کہ طالب علم حتی الامکان مسائل کے متعلقہ امثلہ میں مشقوں کی کافی تعداد کو حل کرنے کی بطور خود پوری پوری کوشش کرے۔ طالب علم کی سہولت کے مدِ نظر جہاں ضروری تصور کیا گیا مشقوں کے اشارے یا مکمل حل درج کردیے گئے ہیں۔ فقط

المرقوم یکم آبان ۱۳۴۴ف

شیخ برکت علی

محمد خواجہ محی الدین

بسم اللہ الرحمن الرحیم

علم ہندسہ مستوی

پہلا باب

تمہید

۱ ۔ اس باب میں بطور تمہید ہم ایسے اہم مسائل درج کرتے ہیں جن سے طالب علم کو اس کتاب کے شروع کرنے سے پہلے واقف ہونا ضروری ہے ۔ یہ تمام مسائل ثبوت اور توضیحی مثالوں کے ساتھ بالعموم علم ہندسہ کی اُن تمام درسی کتابوں میں پائے جاتے ہیں جو مدارس فوقانیہ میں استعمال ہوتی ہیں ۔

۲ ۔ خطوطِ مستقیم ۔

(۱) اگر ایک خطِ مستقیم ایک اَور خطِ مستقیم سے ملے تو دو متصل زاویوں کا مجموعہ دو قائمے ہوتا ہے اور اس کا عکس ۔

(۲) اگر دو خط ایک دُوسرے کو قطع کریں تو مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں ۔

(۳) اگر ایک قاطع دو خطوط کو کاٹے اور متبادل زاویے مساوی ہوں تو مؤخرالذکر دو خطوط متوازی ہونگے اور اس کا عکس ۔

۳ ۔ مثلثات اور متوازی الاضلاع ۔

(۱) کسی مثلث کے تین زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے مساوی ہوتا ہے۔

(۲) دو مثلث ایک دوسرے کے ہر طرح سے مساوی ہونگے اگر

(ا) ایک مثلث کے دو ضلعے دوسرے مثلث کے دو ضلعوں کے جُدا جُدا مساوی ہوں اور ان ضلعوں سے بننے والے زاویے بھی مساوی ہوں

(ب) اگر ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے جُدا جُدا برابر ہوں اور ایک مثلث کا ایک ضلع دوسرے مثلث کے نظیر کے ضلع کے برابر ہو۔

(ج) اگر ایک مثلث کے تین ضلعے دوسرے مثلث کے تین ضلعوں کے جُدا جُدا برابر ہوں۔

(۳) اگر ایک مثلث کے دو ضلعے آپس میں مساوی ہوں تو اُن کے مقابل کے زاویے بھی مساوی ہونگے اور اس کا عکس۔

(۴) اگر دو قائم الزاویہ مثلثوں میں ایک کا وتر اور ایک ضلع دوسرے کے وتر اور ایک ضلع کے بالترتیب مساوی ہوں تو مثلث ہر طرح سے مساوی ہونگے۔

(۵) ایک دیے ہوئے نقطہ سے ایک خطِ مستقیم تک چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ وہ عمود ہوتا ہے جو اس نقطہ سے خطِ مذکور تک کھینچا جائے۔

(۶) متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلعے اور نیز زاویے ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں اور وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں اور ہر وتر متوازی الاضلاع کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

(۷) اگر تین (یا تین سے زیادہ) متوازی خط ایسے ہوں کہ اُن سے ایک قاطع کے مقطوعے مساوی ہوں تو کسی دوسرے قاطع کے مقطوعے بھی مساوی ہونگے۔

۴۔ رقبے۔

(۱) مساوی قاعدوں اور مساوی ارتفاعوں والے متوازی الاضلاع (یا مثلث) رقبے کے لحاظ سے مساوی ہوتے ہیں۔

(۲) کسی مثلث قائم الزاویہ میں وتر پر کا مربع باقی دو ضلعوں پر کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے اور اس کا عکس۔

۵۔ جبریہ ضابطے۔

(۱) $ک(ا + ب + ج + \ldots\ldots) = کا + کب + کج + \ldots$

(۲) $(ا \pm ب)^2 = ا^2 \pm ۲اب + ب^2$

(۳) $ا^2 - ب^2 = (ا + ب)(ا - ب)$

(۴) $(ا + ب)^2 + (ا - ب)^2 = ۲(ا^2 + ب^2)$

(۵) $(ا + ب)^2 - (ا - ب)^2 = ۴اب$

۶۔ دائرے۔

(۱) دائرہ کے مرکز کو وتر کے وسطی نقطہ سے ملانے والا خطِ مستقیم وتر پر عمود ہوتا ہے اور اس کا عکس۔

(۲) دو متقاطع دائروں کے مرکزوں کو ملانے والا خط اُن کے مشترک وتر کا عمودی منصّف ہوتا ہے۔

(۳) تین دیے ہوئے نقطوں میں سے جو ایک خطِ مستقیم میں نہیں ہیں ایک اور صرف ایک دائرہ کھنچ سکتا ہے۔

(۴) ایک ہی دائرہ میں یا مساوی دائروں میں مساوی قوسوں یا مساوی وتروں کے محاذی محیط (یا مرکز) پر مساوی زاویے بنتے ہیں اور اس کا عکس۔

(۵) کسی دائرہ میں مساوی طول کے وتر مرکز سے مساوی الفصل ہوتے ہیں اور اس کا عکس۔

(۶) دائرہ کا کوئی مماس اس کے نقطۂ تماس میں سے گزرنے والے نصف قطر پر عمود وار ہوتا ہے۔

(۷) دائرہ کے کسی مماس اور اس کے نقطۂ تماس میں سے گزرنے والے

کسی وتر کا درمیانی زاویہ متبادل قطعہ کے اندر کے زاویے کے مساوی ہوتا ہے۔

(۸) اگر دو دائرے ایک دوسرے کو مس کریں تو دائروں کے مرکز اور نقطۂ تماس ایک خطِ مستقیم میں ہوتے ہیں۔

(۹) دائرہ کے اندر بنے ہوئے ایک ذوالاربعۃ الاضلاع (چار ضلعی) کے مقابل کے زاویوں کا مجموعہ دو قائمے ہوتا ہے اور اس کا عکس۔

(۱۰) اگر ایک دائرہ کے دو وتر ایک دوسرے کو قطع کریں تو ایک وتر کے حصوں کا حاصل ضرب دوسرے وتر کے حصوں کے حاصلِ ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

۷۔ طریق

(۱) دو معلومہ نقطوں سے مساوی الفصل نقطوں کا طریق معلومہ نقطوں کو ملانے والے خط کا عمودی منصّف ہوتا ہے۔

(۲) ایک ایسے نقطہ کا طریق جو ایک دیے ہوئے خط سے ایک دیے ہوئے فاصلہ پر ہے متوازی خطوط کا ایک جوڑا ہے جن میں سے ہر ایک دیے ہوئے خط کے متوازی ہے۔

(۳) ایک ایسے نقطہ کا طریق جو دو متقاطع خطوطِ مستقیم سے مساوی فاصلو پر رہتا ہے ان خطوط کے درمیانی زاویوں کے منصّفوں کا جوڑا ہے۔

(۴) ایک ایسے نقطہ کا طریق جس پر دو دیے ہوئے نقطوں کو ملانے والے خط کے محاذی ایک دیا ہوا زاویہ بنتا ہے دائرہ کی ایک قوس ہے۔

۸۔ عملی مسئلے

(۱) ایک دیے ہوئے خط یا زاویہ کی تنصیف کرنا۔

(۲) ایک دیے ہوئے خط پر ایک نقطے سے (جو دیے ہوئے خط پر یا اس کے باہر ہو) عمود کھینچنا۔

(۳) دیے ہوئے زاویہ کے مساوی زاویہ بنانا۔

(۴) ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے ایک دیے ہوئے خط کے متوازی خط کھینچنا۔

(۵) ایک دیے ہوئے خط کو متعدد مساوی حصّوں میں تقسیم کرنا۔

(۶) مثلث کا بنانا جبکہ

(ا) تین ضلعے معلوم ہوں۔

(ب) دو ضلعے اور درمیانی زاویہ معلوم ہوں۔

(ج) ایک ضلع اور دو زاویے معلوم ہوں۔

(۷) ایک دیے ہوئے کثیر الاضلاع کے مساوی رقبہ کا مربع بنانا۔

(۸) ایک دیے ہوئے صحیح عدد کا جذر ہندسی طور پر معلوم کرنا۔

(۹) ایک دائرہ کھینچنا جو

(ا) ایک مثلث کے راسوں میں سے گزرے۔

(ب) ایک مثلث کے ضلعوں کو مس کرے۔

(۱۰) ایک دیے ہوئے نقطہ پر دائرہ کا مماس کھینچنا۔

(۱۱) ایک بیرونی نقطہ سے دائرہ کے دو مماس کھینچنا۔

(۱۲) دو دیے ہوئے دائروں کے مشترک (راست اور متقاطع) مماس کھینچنا۔

دوسرا باب

نسبت وتناسب

۹۔ تعریفات اور ابتدائی اُصول۔

ایک مقدار کو اُسی جنس کی کسی دُوسری مقدار کے ساتھ جو ربط یا رشتہ ہو اُس کو اِن مقداروں کی نسبت کہتے ہیں، جبکہ یہ رشتہ ان مقداروں کا اس طرح مقابلہ کرنے سے دیکھا جائے کہ ایک مقدار دوسری مقدار کا کتنے گُنا یا کونسا حصّہ ہے۔ مثلاً اگر دو ہم جنس مقداروں میں بالترتیب ا اور ب اکائیاں ہوں تو پہلی مقدار کو دوسری مقدار کے ساتھ جو نسبت ہے وہ کسر $\frac{ا}{ب}$ یا علامت ا : ب سے تعبیر ہوتی ہے۔ پہلی مقدار ا کو نسبت کا مقدم اور دوسری مقدار ب کو مؤخر کہتے ہیں۔

دو مقداروں کی نسبت اس اِکائی پر موقوف نہیں ہوتی جس کی رقوم میں ان مقداروں کو ناپا گیا ہے۔

یہ نہایت ضروری ہے کہ جن مقداروں کا مقابلہ ایک نسبت کے ذریعہ کیا جائے وہ ایک ہی جنس کی ہوں۔ مثلاً دونوں طول ہوں یا دونوں زاویے ہوں یا دونوں رقبے ہوں۔ ظاہر ہے کہ ایک خط کے طول کا مقابلہ دوسری جنس کی کسی مقدار مثلاً کسی مثلث کے رقبے کے ساتھ نہیں کیا جا سکتا۔

نیز نسبت ایک عدد مجرّد ہے جو صحیح یا کسور ہو سکتا ہے مثلاً ۶ سمر اور ۸ سمر لمبے خطوط کے طولوں کی نسبت $\frac{6}{8}$ یا $\frac{3}{4}$ ہے نہ کہ $\frac{3}{4}$ سمر۔

اگر دو ہم جنس مقداروں کو ایک مشترک اکائی (جسے وفقِ مشترک کہتے ہیں) کی رقوم میں پورا پورا ناپا جا سکے تو اِن مقداروں کو متوافق مقداریں کہتے ہیں اور اِن مقداروں کی نسبت کو دو صحیح اعداد کی نسبت سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔

ممکن ہے کہ دی ہوئی مقداروں میں کوئی وفقِ مشترک نہ ہو مثلاً اگر ایک مربع کا ضلع ا ہو تو اُس کا وتر $\sqrt{2}$ ہوگا۔ $\sqrt{2}$ کی قیمت ٹھیک ٹھیک طور پر نہیں نکالی جا سکتی۔ اگرچہ کہ یہ قیمت کسی مطلوبہ درجۂ صحت تک حاصل کی جا سکتی ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مربع کے ضلع اور وتر کے طول ایک ہی اکائی کی رقوم میں ٹھیک ٹھیک طور پر نہیں ناپے جا سکتے۔

ایسی مقداروں کو جن میں کوئی وفقِ مشترک نہ ہو غیر متوافق یا متبائن مقداریں کہتے ہیں۔ دو غیر متوافق مقداروں کی نسبت کو ٹھیک ٹھیک طور پر دو صحیح اعداد کی نسبت کی شکل میں بیان نہیں کیا جا سکتا لیکن ان کی نسبت کو کسی مطلوبہ درجۂ صحت تک معلوم کیا جا سکتا ہے مثلاً اگر $\sqrt{2}$ کی تقریبی قیمت ۱٫۴۱۴۲ لی جائے تو مربع کے ضلع اور وتر کی نسبت کی قیمت $\frac{1.0000}{1.4142}$ سے تعبیر ہوگی جہاں طول کی ایک چھوٹی اکائی ۰٫۰۰۰۱ کو بطور وفقِ مشترک لیا گیا ہے۔ مربع کے ضلع اور وتر کے طولوں کی نسبت کی اس سے بہتر تقریبی قیمت معلوم ہو سکتی ہے اگر $\sqrt{2}$ کی تقریبی قیمت اعشاریہ کے چار سے زیادہ مقاموں تک لی جائے۔

۱۰۔ اگر دو ہم جنس مقداروں کی نسبت دوسری ہم جنس مقداروں کی نسبت کے مساوی ہو تو یہ چار مقداریں متناسب کہلاتی ہیں۔ یا یوں بیان کرتے ہیں کہ یہ چار مقداریں تناسب میں ہیں مثلاً اگر ا : ب = لا : ما تو ا، ب، لا، ما متناسب کہلاتی ہیں۔

تعریف۔ ا اور ما کو طرفین تناسب اور ب اور لا کو

وسطین تناسب کہتے ہیں۔

نوٹ ۔ کسی تناسب مثلاً ا : ب = لا : ما میں ہر نسبت کی مقداریں ایک ہی جنس کی ہونی چاہییں لیکن یہ ضروری نہیں ہے کہ دونوں نسبتوں کی چاروں مقداریں ایک ہی جنس کی ہوں مثلاً ایسا ہوسکتا ہے کہ ا اور ب دونوں رقبے ہوں اور لا اور ما دو طول ۔ اس صورت میں تناسب سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ پہلے رقبہ کو دوسرے رقبہ کے ساتھ وہی نسبت ہے جو پہلے طول کو دوسرے طول کے ساتھ ہے ۔

۱۱۔ تعریفات۔ اگر چار مقداریں ا، ب، ج، د ایسی ہوں کہ
ا : ب = ج : د تو د کو ا، ب، ج کا چوتھا متناسب کہتے ہیں۔

اگر تین مقداریں ا، ب، ج ایسی ہوں کہ ا : ب = ب : ج تو ج کو ا اور ب کا تیسرا متناسب کہتے ہیں اور ب کو ا اور ج کا وسط متناسب یا ہندسی اوسط کہتے ہیں۔

۱۲۔ علوم متعارفہ۔

(۱) جو نسبتیں ایک ہی نسبت کے مساوی ہوں وہ ایک دوسرے کے بھی مساوی ہوتی ہیں۔ مثلاً اگر ا : ب = لا : ما اور ج : د = لا : ما تو ظاہر ہے کہ ا : ب = ج : د

(۲) اگر تین ہم جنس مقداریں ا، ب، ج ایسی ہوں کہ ا : ج = ب : ج تو ظاہر ہے کہ ا = ب

۱۳۔ تناسب کے ابتدائی مسائل۔

تناسب کے متعلق مندرجۂ ذیل ابتدائی مسئلوں کے ثبوت جبر و مقابلہ کی کسی درسی کتاب میں پائے جاسکتے ہیں۔

(ا) اگر $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$ تو

(۱) $\frac{ب}{ا} = \frac{د}{ج}$ (عکس نسبت)

(۲) $\frac{ا}{ج} = \frac{ب}{د}$ (تبدیلِ نسبت)

(۳) ا د = ب ج

(۴) $\frac{ا + ب}{ب} = \frac{ج + د}{د}$ (ترکیبِ نسبت)

(۵) $\frac{ا - ب}{ب} = \frac{ج - د}{د}$ (تفصیلِ نسبت)

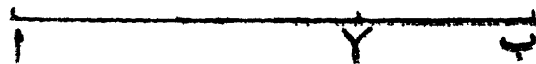
(۶) $\frac{ا + ب}{ا - ب} = \frac{ج + د}{ج - د}$ (ترکیب و تفصیلِ نسبت)

(ب) اگر $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{ع}{ف} = \ldots\ldots = ک$ تو

$$ک = \frac{ا + ج + ع + \ldots}{ب + د + ف + \ldots\ldots}$$

$$= \frac{م_۱ ا + م_۲ ج + م_۳ ع + \ldots}{م_۱ ب + م_۲ د + م_۳ ف + \ldots\ldots}$$ جہاں $م_۱$، $م_۲$، $م_۳$... کوئی عدد ہیں

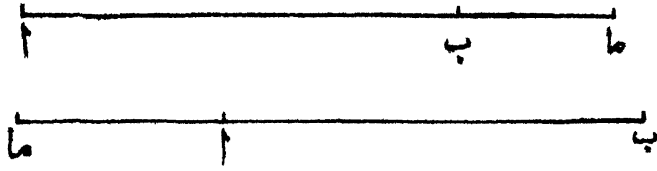
۴ا۔ **تعریف** ۔ اگر ایک محدود خطِ مستقیم ا ب پر (ا اور ب کے درمیان) ایک نقطہ لا لیا جائے تو ہم کہتے ہیں کہ ا ب کی داخلی تقسیم نقطہ لا پر ہوئی ہے

ا　　لا　　ب

الا اور لاب خط ا ب کے دو حصّے ہیں اور اِن کے طولوں کی علامت ایک ہی ہے کیونکہ دونوں کی سمت وہی ہے اس لیے الا اور لاب کی نسبت ایک مثبت مقدار ہوگی ۔

اگر نقطۂ ما ا ب ممدودہ پر (ا کی جانب یا ب کی جانب) لیا جائے تو ہم کہتے ہیں کہ ا ب کی خارجی تقسیم نقطۂ ما پر ہوئی ہے اس صورت میں اما اور ماب کی سمتیں مختلف ہیں اور خط ا ب کے دو حصّے اما، ماب ہیں جو مختلف العلامت ہیں ۔ اس لیے اما اور ماب کی نسبت

ایک منفی مقدار ہے۔

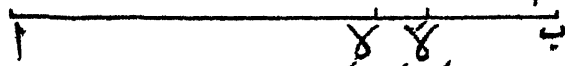
ا　　　　ب　　ما

ما　　ا　　　　ب

پس معلوم ہوا کہ اگر ا ب کے حصص کی نسبت کی علامت مثبت ہو تو تقسیم داخلی ہوگی اور اگر نسبت مذکور کی علامت منفی ہو تو تقسیم خارجی ہوگی۔

خارجی تقسیم کی صورت میں اگر ما ب کی طرف واقع ہو تو ا ما اور ما ب کی نسبت ایک منفی مقدار ہوگی جس کی عددی قیمت ا سے بڑی ہوگی۔ اسی طرح اگر ما، ا کی طرف واقع ہو تو ا ما اور ما ب کی نسبت ایک منفی کسر واجب ہوگی۔

نوٹ۔ عام طور پر اگر اشتباہ کا اندیشہ نہ ہو تو اختصار اور سہولت کے مدِنظر خط کے حصوں کی نسبت کی علامت کو نظر انداز کر دیا جاتا ہے۔ مثلاً اگر ا ب محدودہ پر نقطۂ ما ایسا ہو کہ ا ما اور ما ب کی نسبت $-\frac{۳}{۲}$ ہو تو اُسے یوں بھی بیان کیا جاتا ہے کہ ا ب کی خارجی تقسیم نقطۂ ما پر ۳ : ۲ کی نسبت میں ہوئی ہے۔

۱۵۔ مسئلہ — ایک دیے ہوئے خط کو ایک دی ہوئی نسبت میں داخلاً ایک اور صرف ایک ہی نقطہ پر اور خارجاً ایک اور صرف ایک ہی نقطہ پر تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

ا　　　　لا　لاَ　　ب

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ایک دیے ہوئے خط ا ب کو داخلاً ایک دی ہوئی نسبت $\frac{م}{ن}$ میں دو مختلف نقطوں لا اور لاَ پر تقسیم کیا جا سکتا ہے

از رُوئے مفروض $\frac{ا لا}{لا ب} = \frac{م}{ن}$ اور $\frac{ا لاَ}{لاَ ب} = \frac{م}{ن}$

$$\therefore \quad \frac{ا لا}{لا ب} = \frac{ا لاَ}{لاَ ب}$$

$$\therefore \quad \frac{ا لا + لا ب}{لا ب} = \frac{ا لاَ + لاَ ب}{لاَ ب} \quad \text{یعنی} \quad \frac{ا ب}{لا ب} = \frac{ا ب}{لاَ ب}$$

∴ لاَ ب = لا ب

پس لاَ منطبق ہے لا پر یعنی لا اور لاَ مختلف نقطے نہیں ہیں۔
اسی طرح خارجی تقسیم کی صورت میں بھی یہ مسئلہ ثابت ہو سکتا ہے۔
اس کا ثبوت مندرجۂ بالا طریقہ سے طالب علم خود بہم پہنچائے۔

امثلہ

(۱) ایک خطِ مستقیم ۹،۶″ لمبا ہے اس کی داخلی تقسیم ۵ : ۷ کی نسبت میں کی گئی ہے۔ خط کے حصوں کے طول معلوم کرو۔ (جواب ۴″، ۵،۶″)

(۲) ایک خطِ مستقیم ۴،۵ سمر لمبا ہے۔ اُس کی خارجی تقسیم ۵ : ۴ کی نسبت میں کی گئی ہے، حصوں کے طول معلوم کرو۔ (جواب ۲۲،۵ سمر، ۱۸ سمر)

(۳) خطِ مستقیم اب ۶،۴ سمر لمبا ہے اُس کو داخلاً لا پر اور خارجاً ما پر ایک ہی نسبت ۵ : ۳ میں تقسیم کیا گیا ہے، الا اور اما کے طول معلوم کرو اور تصدیق کرو کہ $\frac{\text{۲}}{\text{اب}} = \frac{\text{۱}}{\text{الا}} + \frac{\text{۱}}{\text{اما}}$ [جواب الا = ۴ سمر، اما = ۱۶ سمر]

(۴) لؔ لمبے خطِ مستقیم کی داخلی تقسیم نسبت م : ن میں کی گئی ہے حصوں کے طول معلوم کرو (جواب $\frac{\text{لم}}{\text{م+ن}}$، $\frac{\text{لن}}{\text{م+ن}}$)

(۵) لؔ لمبے خطِ مستقیم کی خارجی تقسیم نسبت م : ن میں کی گئی ہے، حصوں کے طول معلوم کرو۔ (جواب $\frac{\text{لم}}{\text{م-ن}}$، $\frac{\text{لن}}{\text{م-ن}}$)

(۶) دو خطوطِ مستقیم اب اور ج د کی داخلی تقسیم ایک ہی نسبت میں بالترتیب لا اور ما پر کی گئی ہے، ثابت کرو کہ

(۱) اب : لا ب = ج د : ما د

(۲) اب : الا = ج د : ج ما

(۷) اب ایک خطِ مستقیم ہے، ایک نقطہ لا، ا سے ب کی طرف

مسلسل طور پر حرکت کرتا ہے، نسبت ا لا : لا ب کی قیمت کے تغیر پر بحث کرو۔
فرض کرو کہ ا ب کا وسطی نقطہ و ہے اگر نقطہ لا نقطہ ا پر ہو تو نسبت ا لا : لا ب = ۰

ا لا و ب

اگر نقطہ لا، ا اور و کے درمیان ہو تو نسبت ا لا : لا ب ایک مثبت کسرِ واجب ہوگی۔ جوں جوں نقطہ لا، و کے قریب آتا جاتا ہے یہ نسبت جو ا سے کم ہے بتدریج ا کے قریب آتی جاتی ہے اور جب لا، و پر منطبق ہوتا ہے تو نسبت ا لا : لا ب = ا

اگر لا، و اور ب کے درمیان ہو تو نسبت ا لا : لا ب بڑی ہے ا سے، جوں جوں لا ب کی طرف جاتا ہے نسبت ا لا : لا ب کی قیمت بتدریج بڑھتی جاتی ہے، جب لا ب کے نہایت قریب جاتا ہے تو اس نسبت کی قیمت بہت بڑی ہو جاتی ہے اور جب لا ب پر منطبق ہو جاتا ہے تو لا ب کا طول صفر ہو جاتا ہے اور نسبت = ا لا : صفر۔ اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ اِس نسبت کی قیمت لاتناہی ہے اور اسے علامت ∞ سے تعبیر کرتے ہیں۔ طالب علم کو بخوبی سمجھ لینا چاہیے کہ جن معنوں میں عام اعداد وجود رکھتے ہیں ان معنوں میں ∞ کوئی عدد نہیں ہے مندرجۂ بالا الفاظ کا مفہوم صرف یہ ہے کہ " لا کو ب کے کافی قریب لینے سے ا لا : لا ب کی قیمت کو کسی دیے ہوئے عدد سے (خواہ وہ عدد کتنا ہی بڑا کیوں نہ ہو) بڑا بنایا جا سکتا ہے۔"

پس معلوم ہوا کہ جب لا، ا سے ب تک مسلسل طور پر حرکت کرتا ہے تو نسبت ا لا : لا ب کی قیمت مسلسل طور پر صفر سے ∞ تک بدلتی ہے۔

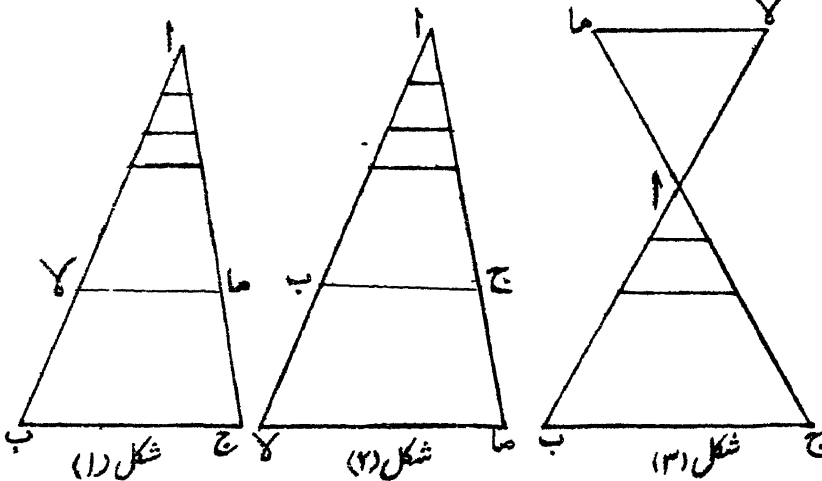
(۸) ا ب ایک خطِ مستقیم ہے۔ ایک نقطہ لا، ب سے روانہ ہو کر دائیں طرف حرکت کرتا ہے۔ (دیکھو نیچے کی شکل) نسبت ا لا : لا ب کے تغیر پر بحث کرو۔

ا ب لا

ظاہر ہے کہ یہ نسبت منفی ہوگی۔
جب لا ب کے قریب ہے تو ا لا : لا ب بہت بڑی منفی مقدار ہے اور لا کو ب کے کافی قریب لینے سے اس نسبت کی عددی قیمت کو جتنا بڑا چاہیں بنا سکتے ہیں۔ جوں جوں لا دائیں جانب حرکت کرتا ہے اس نسبت کی عددی قیمت گھٹتی جاتی ہے لیکن ہمیشہ ۱ سے بڑی رہتی ہے۔ لا کو ب سے کافی دور لینے سے اس نسبت کی عددی قیمت کو ۱ کے جس قدر قریب چاہیں لا سکتے ہیں۔ پس معلوم ہوا کہ جوں جوں لا ب سے شروع ہو کر دائیں طرف حرکت کرتا ہے نسبت ا لا : لا ب کی عددی قیمت ∞ سے ۱ کے قریب آتی جاتی ہے۔

نوٹ۔ دیکھا جائے کہ نسبت ا لا : لا ب کی کسی عددی قیمت کے جواب میں جو ۱ سے بڑی ہے نقطۂ لا کے دو مقام ہیں جن میں ایک و اور ب کے درمیان ہے اور دوسرا ا ب ممدودہ پر ب کے دائیں جانب ہے۔

(۹) سوال ۸ کے مماثل طریقہ سے نسبت ا لا : لا ب کے تغیر پر بحث کرو جبکہ لا ب ا ممدودہ پر ا سے شروع ہو کر بائیں جانب حرکت کرے۔

۱۶۔ مسئلہ: ایک خطِ مستقیم جو ایک مثلث کے ایک ضلع کے متوازی ہے مثلث کے باقی دو اضلاع کو یا اضلاع ممدودہ کو ایک ہی نسبت میں تقسیم کرتا ہے اور اس کا عکس۔

مثلث ا ب ج کے ضلع ب ج کے متوازی ایک خط کھینچا گیا ہے جو اضلاع
اب، اج کو یا اضلاع محدودہ کو بالترتیب لا اور ما پر کاٹتا ہے، ثابت کرنا ہے کہ
ا لا : لا ب = ا ما : ما ج۔
شکل ۱ میں نقاط لا اور ما بالترتیب اب، اج کی داخلی تقسیم
کرتے ہیں۔
اشکال ۲ اور ۳ میں نقاط لا اور ما بالترتیب اب اور اج کی
خارجی تقسیم کرتے ہیں۔
فرض کرو کہ ا لا اور لا ب کے طولوں کا وفق مشترک طول ط ہے،
نیز فرض کرو کہ ا لا میں طول ط، م دفعہ شریک ہے اور لا ب میں طول ط، ن دفعہ
شریک ہے۔
تب ا لا = م × ط اور لا ب = ن × ط

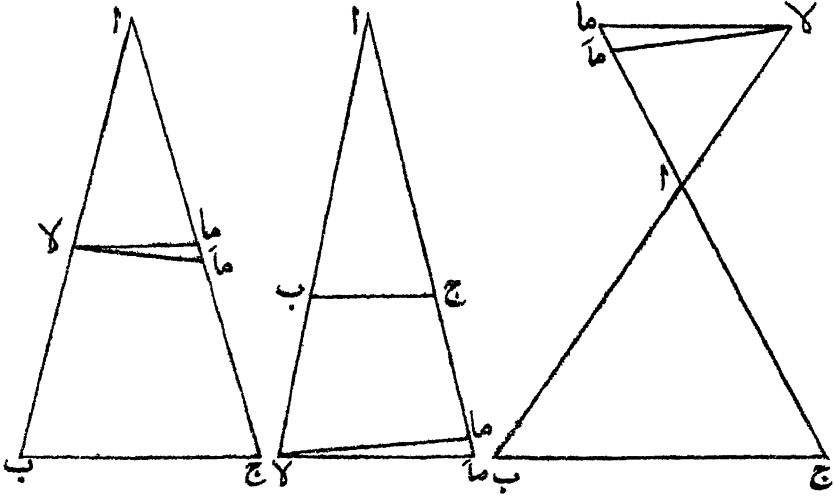
∴ ا لا : لا ب = م×ط : ن×ط = م : ن .... (۱)

ا لا اور لا ب کو طول ط والے حصوں میں تقسیم کرو اور نقاطِ تقسیم میں سے
ب ج کے متوازی خطوط کھینچو۔ ان خطوط کے ذریعہ ا ما اور ما ج بالترتیب
مساوی طول والے م اور ن حصوں میں تقسیم ہو جائینگے۔ فرض کرو کہ ان حصوں
میں سے ہر ایک کا طول = ل
تب ا ما = م × ل اور ما ج = ن × ل

∴ ا ما : ما ج = م × ل : ن × ل = م : ن .... (۲)

پس (۱) اور (۲) سے، ا لا : لا ب = ا ما : ما ب۔ یہی ثابت کرنا تھا۔
نوٹ۔ شکل ۱ میں ا لا : لا ب اور نیز ا ما : ما ب دونوں مثبت ہیں
اور مقداریں مساوی ہیں۔
اشکال (۲) اور (۳) میں ا لا : لا ب اور نیز ا ما : ما ب دونوں منفی
ہیں اور مقداریں مساوی ہیں۔

مسئلۂ بالا کا عکس یہ ہے ''اگر مثلث ا ب ج کے اضلاع اب ، ا ج پر بالترتیب نقاط لا اور ما اس طرح لیے جائیں کہ (بلحاظ مقدار اور علامت کے)

ا لا : لا ب = ا ما : ما ب تو لا ما متوازی ہوگا ب ج کے''

اگر لا ما متوازی نہیں ہے ب ج کے تو لا ماَ متوازی ب ج کے کھینچو

چونکہ لا ماَ // ب ج اس لیے ا لا : لا ب = ا ماَ : ماَ ج

لیکن معلوم ہے ا لا : لا ب = ا ما : ما ج

اس لیے ا ما : ما ج = ا ماَ : ماَ ج

اس لیے نقطۂ ماَ، منطبق ہے نقطہ ما پر

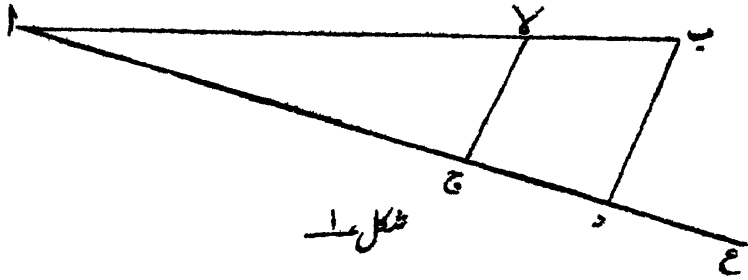
پس ثابت ہوا کہ لا ما متوازی ہے ب ج کے

نوٹ: مسئلۂ بالا کے ثبوت میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ا لا اور لا ب متوافق مقداریں ہیں۔ اگر ا لا اور لا ب غیر متوافق ہوں تو کسی بہت چھوٹی اکائی کی رقوم میں اِن دونوں طولوں کو ناپنے سے ا لا : لا ب کی تقریبی قیمت حاصل کی جاسکتی ہے اور ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ا ما : ما ج کی تقریبی قیمت ا لا : لا ب کی تقریبی قیمت کے مساوی ہے۔

نتیجہ صریح: اگر تین یا تین سے زیادہ متوازی خطوط کو دو خطوطِ مستقیم قطع کریں تو ایک قاطع پر کے مقطوعوں کے طول دوسرے قاطع پر کے متناظر مقطوعوں کے

طولوں کے متناسب ہونگے۔

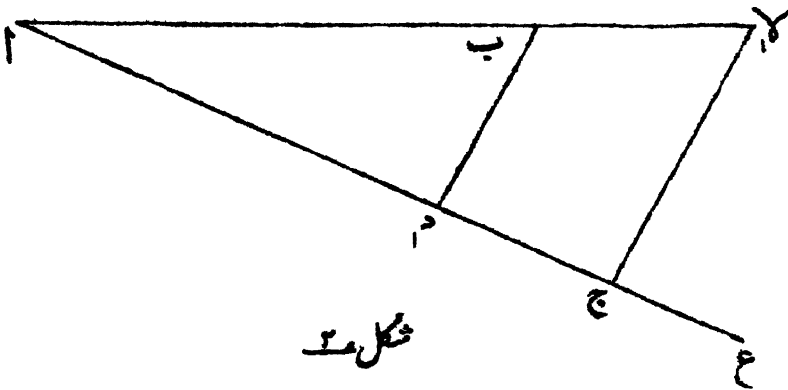
۱۷۔ **مسئلہ عملی** ایک دیے ہوئے خط کو داخلاً اور خارجاً ایک دی ہوئی نسبت میں تقسیم کرنا۔

داخلی تقسیم۔ [دیکھو شکل ۱]

شکل ۱

فرض کرو کہ ا ب ایک دیا ہوا خط مستقیم ہے۔ اسے داخلاً نسبت م : ن میں تقسیم کرنا مقصود ہے۔ اسے کوئی اور خط ا ع کھینچو اور طول کی کوئی مناسب اکائی لے کر ا ع پر نقاط ج اور د ایسے معلوم کرو کہ ا ج میں ایسی م اکائیاں اور ج د میں ایسی ن اکائیاں شامل ہوں۔

د ب کو ملاؤ اور د ب کے متوازی ج لا کھینچو جو ا ب سے لا پر ملے
تب نقطہ لا خط ا ب کو داخلاً دی ہوئی نسبت م : ن میں تقسیم کریگا۔
چونکہ ج لا متوازی ہے شلث ا ب د کے ضلع د ب کے

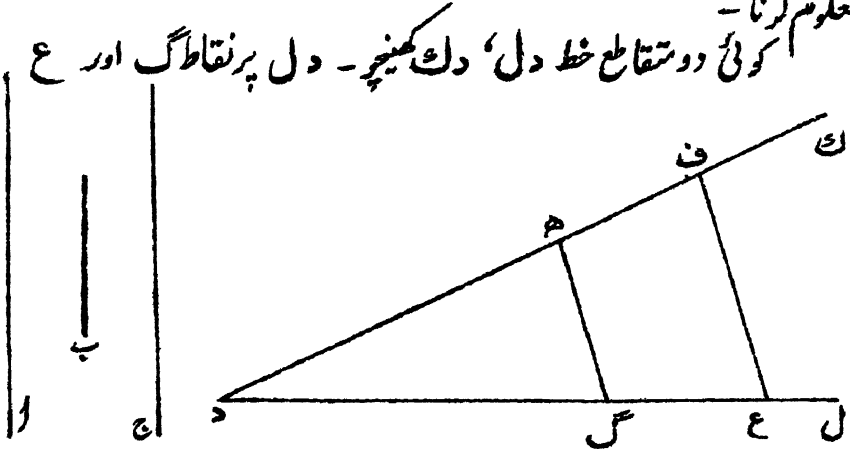
اس لیے ا لا : لا ب = ا ج : ج د = م : ن

خارجی تقسیم [دیکھو شکل ۲]

شکل ۲

د میں سے کوئی اور خط ا ع کھینچو اور طول کی کوئی مناسب اکائی لے کر ا ع پر نقاط ج اور د ایسے معلوم کرو کہ ا ج میں ایسی م اکائیاں اور ج د میں ایسی ن اکائیاں شامل ہوں (خارجی تقسیم کی صورت میں ا ج اور ج د کی سمتیں مخالف ہونگی)۔
د ب کو ملاؤ اور د ب کے متوازی ج لا کھینچو جو ا ب ممدودہ سے لا پر ملے تب نقطہ لا خط ا ب کو خارجاً دی ہوئی نسبت م : ن میں تقسیم کریگا۔
چونکہ ج لا متوازی ہے مثلث ا ب د کے ضلع د ب کے
اس لیے ا لا : لا ب = ا ج : ج د = م : ن
پس ا ب کی داخلی تقسیم لا پر اور خارجی تقسیم لا پر دی ہوئی نسبت م : ن میں ہوتی ہے۔

۱۸ - مسئلہ عملی - تین دیے ہوئے خطوط ا، ب، ج کا چوتھا تناسب معلوم کرنا۔

کوئی دو متقاطع خط د ل، د ك کھینچو۔ د ل پر نقاط گ اور ع

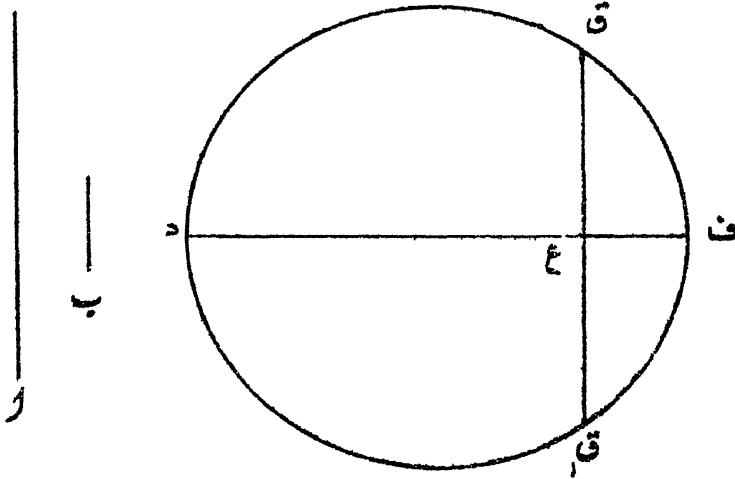
ك ف ھ ب د گ ع ل ا ج

ایسے معلوم کرو کہ د گ = ا اور گ ع = ب اور د ك پر نقطہ ھ ایسا معلوم کرو کہ د ھ = ج
گ ھ کو ملاؤ اور گ ھ کے متوازی ع ف کھینچو جو د ك سے ف پر ملے۔
تب ھ ف چوتھا تناسب ہوگا معلومہ خطوط ا، ب، ج کا
چونکہ مثلث د ع ف میں گ ھ // ع ف
اس لیے د گ : گ ع = د ھ : ھ ف

یعنی ا : ب = ج : ھ ف

پس ثابت ہوا کہ ھ ف چوتھا تناسب ہے ا، ب، ج کا

نوٹ: تیسرے تناسب کی تعریف سے ظاہر ہے کہ ا اور ب کا تیسرا تناسب فی الحقیقت ا، ب، ب کا چوتھا تناسب ہے۔

اس لیے مندرجہ بالا مسئلۂ عملی کے طریقہ سے دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم ا اور ب کا تیسرا تناسب معلوم کیا جا سکتا ہے۔

۱۹۔ مسئلۂ عملی۔ دو دیے ہوئے خطوط ا اور ب کے درمیان وسطِ تناسب معلوم کرنا۔

ایک خطِ مستقیم پر تین نقطے د، ع، ف ایسے معلوم کرو کہ

د ع = ا اور ع ف = ب

د ف کو قطر مان کر دائرہ کھینچو اور ع میں سے ایک خط ق ع ق۱ کھینچو جو د ف پر عمود ہے اور دائرہ سے ق اور ق۱ پر ملتا ہے۔

تب ع ق وسطِ تناسب ہوگا دیے ہوئے خطوط ا اور ب کے درمیان۔ چونکہ قطر د ف عمود ہے وتر ق ق۱ پر

اس لیے ق ع = ع ق۱

نیز ق ق، اور د ف کے حصوں کے حاصل ضرب مساوی ہیں

یعنی ق ع × ع ق، = د ع × ع ف

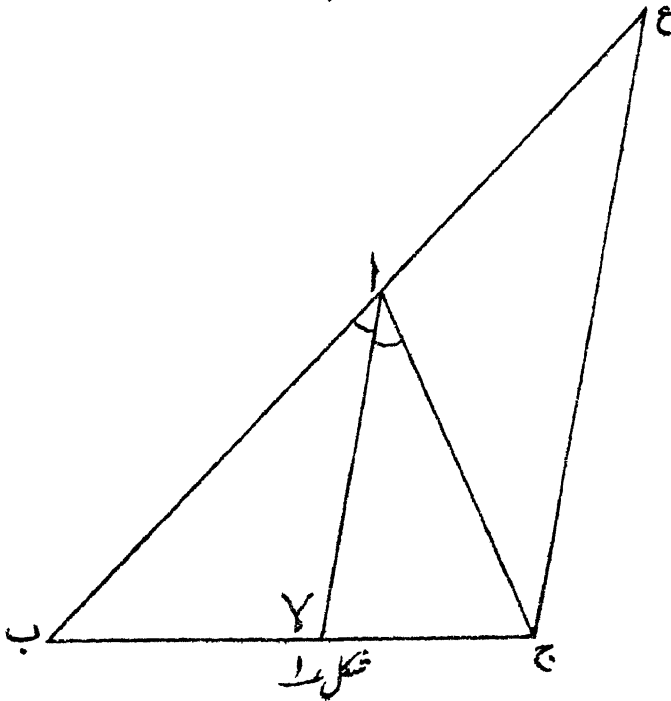
یعنی ع ق^2 = ا × ب　　یعنی ا : ع ق = ع ق : ب

پس معلوم ہوا کہ ع ق وسطِ تناسب ہے ا اور ب کے درمیان۔

نوٹ: مندرجۂ بالا عمل کے متبادل ثبوت کے لیے دیکھو امثلہ ۳ مثال ۱۰۔

۳۰ ۔ مسئلہ ۔ مثلث کے کسی زاویہ کا داخلی (خارجی) ناصف مقابل کے ضلع کو باقی دو اضلاع کی نسبت میں داخلاً (خارجاً) تقسیم کرتا ہے اور اس کا عکس

حصۂ اول (داخلی ناصف) (دیکھو شکل ۱)

شکل ۱

مثلث ا ب ج کے زاویہ ب ا ج کا داخلی ناصف مقابل کے ضلع ب ج سے نقطۂ لا پر ملتا ہے، ثابت کرنا ہے کہ

ب لا : لا ج = ا ب : ا ج

لا ا کے متوازی ج ع کھینچو جو ب ا ممدودہ سے ع پر ملے

تب ∠ ب ا لا = ∠ ا ع ج (متناظر زاویے)

اور ∠ لا ا ج = ∠ ا ج ع (متبادل زاویے)

لیکن حسب مفروض ∠ ب ا لا = ∠ لا ا ج

اس لیے ∠ ا ع ج = ∠ ا ج ع

∴ ا ج = ا ع .... (۱)

چونکہ مثلث ب ج ع میں لا ا متوازی ہے ضلع ج ع کے

اس لیے ب لا : لا ج = ب ا : ا ع

= ب ا : ا ج بموجب (۱)۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

عکس — اگر مثلث ا ب ج میں ضلع ب ج کی داخلی تقسیم نقطہ لا پر اس طرح کی جائے کہ ب لا : لا ج = ا ب : ا ج تو ا لا داخلی ناصف ہوگا ∠ ب ا ج کا۔

لا ا کے متوازی ج ع کھینچو جو ب ا ممدودہ سے ع پر ملے

چونکہ مثلث ب ج ع میں لا ا متوازی ہے ضلع ج ع کے

اس لیے ب لا : لا ج = ب ا : ا ع

لیکن حسب مفروض ب لا : لا ج = ا ب : ا ج

اس لیے ب ا : ا ع = ا ب : ا ج یعنی ا ع = ا ج

اس لیے ∠ ا ع ج = ∠ ا ج ع

نیز ∠ ب ا لا = ∠ ا ع ج (متناظر زاویے)

اور ∠ لا ا ج = ∠ ا ج ع (متبادل زاویے)

اس لیے ∠ ب ا لا = ∠ لا ا ج

یعنی ا لا داخلی ناصف ہے ∠ ب ا ج کا۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

حصہ دوم (خارجی ناصف) (دیکھو شکل ۲)

شکل ۲

مثلث اب ج کے زاویہ ب ا ج کا خارجی ناصف مقابل کے ضلع ب ج سے لا, پر ملتا ہے ثابت کرنا ہے کہ ب لا, : ج لا, = اب : ا ج

لا, ا کے متوازی ج ع, کھینچو جو اب سے ع, پر ملے۔

ب ا کو کسی نقطہ ف تک خارج کرو۔

تب ∠ ف ا لا, = ∠ ا ع, ج (متناظر زاویے)

اور ∠ لا, ا ج = ∠ ا ج ع, (متبادل زاویے)

لیکن حسبِ مفروض ∠ ف ا لا, = ∠ لا, ا ج

اس لیے ∠ ا ع, ج = ∠ ا ج ع,

اس لیے ا ج = ا ع, ... (۱)

چونکہ مثلث ب ج ع, میں لا, ا متوازی ہے ج ع, کے

اس لیے ب لا, : ج لا, = ب ا : ع, ا

= اب : ا ج بموجب (۱)

یہی ثابت کرنا تھا۔

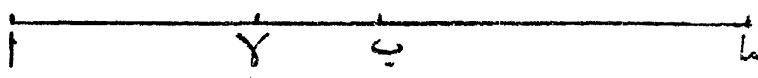
عکس ۔ اگر مثلث ا ب ج میں ضلع ب ج کی خارجی تقسیم نقطہ لا پر اس طرح کی جائے کہ ب لا : ج لا = ا ب : ا ج تو ا لا خارجی ناصف ہوگا < ب ا ج کا

لا ا کے متوازی ج ع کھینچو جو ب ا سے ع پر ملے
ب ا کو کسی نقطہ ف تک خارج کرو۔

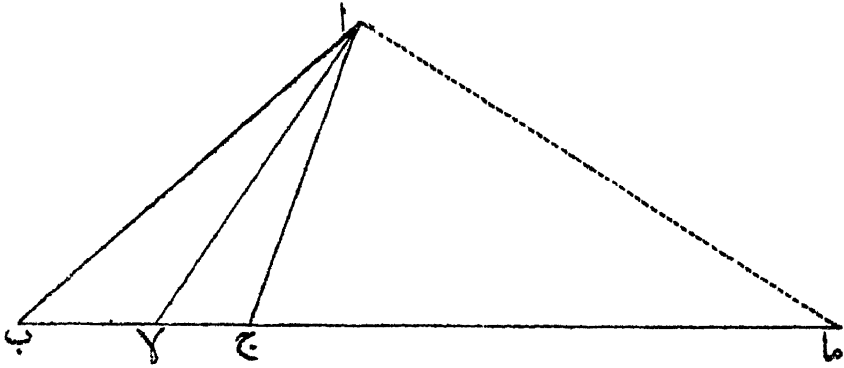
چونکہ مثلث ب ج ع میں لا ا متوازی ہے ج ع کے
اِس لیے ب لا : ج لا = ب ا : ع ا
لیکن حسب مفروض ب لا : ج لا = ا ب : ا ج
اِس لیے ب ا : ع ا = ا ب : ا ج یعنی ا ع = ا ج
اِس لیے < ا ج ع = < ا ع ج
نیز < ف ا لا = < ا ع ج (متناظر زاویے)
اور < لا ا ج = < ا ج ع (متبادل زاویے)
اس لیے < ف ا لا = < لا ا ج
یعنی ا لا خارجی ناصف ہے < ب ا ج کا۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

نوٹ: اگر مثلث ا ب ج میں ا ب = ا ج تو < ب ا ج کا داخلی ناصف مقابل کے ضلع ب ج کے وسطی نقطہ میں سے گزرتا ہے۔ یعنی قاعدہ کو اضلاع کی نسبت یعنی ۱ : ۱ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے جو مسئلہ بالا کے عین مطابق ہے۔
نیز < ب ا ج کا خارجی ناصف قاعدہ ب ج کے متوازی ہے اور اس لیے قاعدہ سے لاتناہی پر ملتا ہے۔ یعنی قاعدہ کی خارجی تقسیم ۱ : ۱ کی نسبت میں کرتا ہے، یہ بھی مسئلہ بالا کے عین مطابق ہے۔

۲۱۔ **تعریف**:۔ اگر ایک خطِ مستقیم ا ب کی داخلی تقسیم نقطہ لا پر اور خارجی تقسیم نقطہ ما پر اس طرح کی جائے کہ ا لا : لا ب = ا ما : ب ما تو کہا جاتا ہے کہ ا ب کی موسیقی تقسیم لا اور ما پر کی گئی ہے۔

ا　　لا　　ب　　ما

بلحاظ ا اور ب کے نقاط لا اور ما ایک دوسرے کے موسیقی مزدوج کہلاتے ہیں۔

نوٹ (۱) دفعہ ۲۰ کے مسئلہ سے ظاہر ہے کہ مثلث کے کسی زاویہ کے داخلی اور خارجی ناصف مقابل کے ضلع کی موسیقی تقسیم کرتے ہیں۔

نوٹ (۲) ایک دیے ہوئے قاعدہ ب ج پر کوئی مثلث ا ب ج ایسا بنایا گیا ہے کہ ا ب : ا ج ایک مستقل مقدار ہے۔ اگر ∠ ب ا ج کے داخلی اور خارجی ناصف قاعدہ ب ج سے بالترتیب لا اور ما پر ملیں تو لا اور ما رأس ا

کے تمام مقاموں کے لیے ثابت نقطے ہونگے۔ نیز ∠ لا ا ما قائمہ ہے اس لیے دی ہوئی شرائط کے ماتحت رأس ا کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا قطر لا ما ہے۔

نوٹ (۳) اگر ایک دیے ہوئے خط ب ج کی موسیقی تقسیم لا ما پر کی جائے اور لا ما قطر پر کے دائرہ پر کوئی نقطہ ا ہو تو ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ا ب : ا ج ایک مستقل مقدار ہے (دیکھو دفعہ ۹۳ باب ۷)۔

لا ما قطر پر کے دائرہ کو اپولونی ئس (Appolonius) کا دائرہ کہتے ہیں اور یہ دائرہ اُس نقطہ کا طریق ہے جس کے فاصلے دو ثابت نقطوں سے مستقل نسبت میں رہتے ہیں۔

امثلہ ۲

(۱) ثابت کرو کہ مثلث کے کسی دو ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے والا خط

تیسرے ضلع کے متوازی ہے۔

(۲) مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے ایک خط قاعدہ کے متوازی کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ خط دوسرے ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔

(۳) ثابت کرو کہ منحرف کے غیر متوازی ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے والا خط متوازی اضلاع کے متوازی ہوتا ہے۔

(۴) مثلثات ا ب ج، د ب ج مشترک قاعدہ ب ج کے ایک ہی طرف واقع ہیں قاعدہ کے کسی نقطہ ع میں سے ب ا اور ب د کے متوازی خط کھینچے گئے ہیں جو ا ج، د ج سے بالترتیب ف اور گ پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ ف گ متوازی ہے ا د کے۔

(۵) ایک خطِ مستقیم مثلث ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب (ممدودہ بشرطِ ضرورت) سے بالترتیب د، ع، ف پر ملتا ہے اور ا ب، ا ج کے ساتھ مساوی زاویے بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ ب د : ج د = ب ف : ج ع۔

(۶) مثلث ا ب ج میں ا د عمود ہے زاویہ ب کے داخلی ناصف پر۔ ثابت کرو کہ ایک خط جو د میں سے ب ج کے متوازی کھینچا جائے ا ج کی تنصیف کرتا ہے۔

(۷) ا، ب، ج، د چار ہم خط نقطے ہیں (اسی ترتیب میں)۔ اس خط پر ایک نقطہ و ایسا معلوم کرو کہ ا و : و د = ب و : و ج

(۸) مثلث ا ب ج میں لا ما متوازی ہے ب ج کے اور ا ب، ا ج سے بالترتیب لا اور ما پر ملتا ہے۔

(ا) اگر ا ب = ۶٫۳″، ا ج = ۴٫۲″ اور ا لا = ۱٫۶″ تو ا ما محسوب کرو۔ [جواب ۴٫۱″]

(ب) اگر ا ب = ۴″، ا ج = ۵٫۱″ اور ا ما = ۹٫۰″ تو ب لا محسوب کرو۔ [جواب ۸٫۰″]

(ج) اگر ا لا : لا ب = ۸ : ۳ اور ا ج = ۸٫۸ سمر تو ا ما محسوب کرو۔ [جواب ۶٫۴ سمر]

(۹) مثلث ا ب ج میں اَ = ۵٫۱ ، بَ = ۴٫۲"
اور جَ = ۶٫۳" زاویہ ا کے داخلی اور خارجی منصف ضلع ب ج سے
بالترتیب لا اور ما پر ملتے ہیں۔ ب لا اور ب ما کے طول محسوب
کرو۔
[جواب ۹ء، ۵٫۴"]

(۱۰) مثلث ا ب ج کا ایک وسطانیہ ا د ہے۔ زاویوں ا د ب
اور ا د ج کے داخلی ناصف ا ب، ا ج سے بالترتیب لا اور ما پر
ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ لا ما متوازی ہے ب ج کے۔

(۱۱) اگر ذو اربعۃ الاضلاع ا ب ج د کے زاویوں ا اور ج کے
ناصف ب د پر ملیں تو ثابت کرو کہ زاویوں ب اور د کے ناصف ا ج
پر ملینگے۔

(۱۲) دفعہ ۲۰ کے مسئلہ کی مدد سے ثابت کرو کہ
(ا) مثلث کے تینوں زاویوں کے داخلی ناصف متراکز
ہوتے ہیں۔
(ب) مثلث کے دو زاویوں کے خارجی ناصف اور تیسرے
زاویہ کا داخلی ناصف متراکز ہوتے ہیں۔

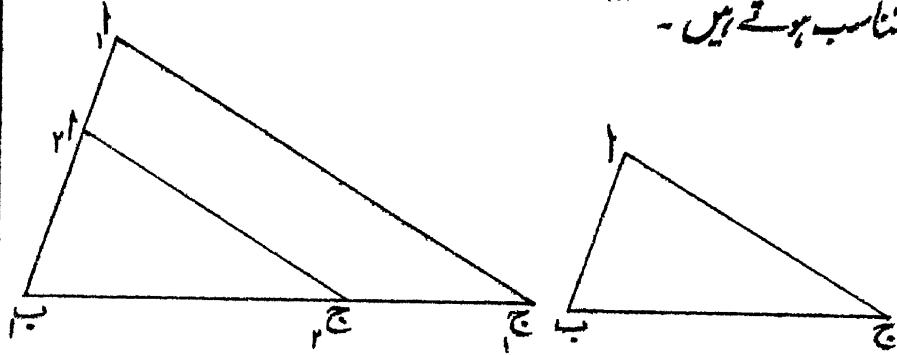
(۱۳) مثلث کا قاعدہ، راسی زاویہ اور باقی اضلاع کی نسبت
معلوم ہیں۔ مثلث بناؤ۔

۲۲۔ متشابہ اشکال۔

تعریفات۔ اگر دو مستقیم الاضلاع اشکال ایسی ہوں کہ ایک کے
زاویے دوسری شکل کے زاویوں کے جداگانہ ایک ہی ترتیب میں مساوی
ہوں اور ایک کے ضلعے دوسری شکل کے نظیر کے ضلعوں کے متناسب
ہوں تو یہ اشکال ایک دوسرے کے متشابہ کہلاتی ہیں یا مختصراً ان کو
متشابہ اشکال کہتے ہیں۔

اگر ایک مستقیم الاضلاع شکل کے زاویے جداگانہ ایک ہی ترتیب میں

دوسری مستقیم الاضلاع شکل کے زاویوں کے مساوی ہوں تو یہ اشکال متساوی الزوایا کہلاتی ہیں۔

۳۲ ۔ مسئلہ ۔ اگر دو مثلث متساوی الزوایا ہوں تو اُن کے نظیر کے ضلعے متناسب ہوتے ہیں۔

مثلثات **ا ب ج**، $ا_1 ب_1 ج_1$ میں $\angle$ ا = $\angle ا_1$،
$\angle$ ب = $\angle ب_1$ اور (لازماً) $\angle$ ج = $\angle ج_1$ ثابت کرنا ہے کہ

$$\frac{ب ج}{ب_1 ج_1} = \frac{ا ج}{ا_1 ج_1} = \frac{ا ب}{ا_1 ب_1}$$

$ب_1 ا_1$ پر نقطہ $ا_2$ ایسا لو کہ $ب_1 ا_2$ = ب ا اور $ب_1 ج_1$ پر نقطہ $ج_2$ ایسا لو کہ $ب_1 ج_2$ = ب ج،

$ا_2 ج_2$ کو ملاؤ۔

تب مثلثات $ب_1 ا_2 ج_2$ اور ب ا ج ہر طرح سے باہم مساوی ہونگے

اِس لیے $\angle ب_1 ا_2 ج_2$ = $\angle$ ب ا ج

اور حسب مفروض $\angle$ ب ا ج = $\angle ب_1 ا_1 ج_1$

اِس لیے $\angle ب_1 ا_2 ج_2$ = $\angle ب_1 ا_1 ج_1$

اس لیے $ا_2 ج_2 \parallel ا_1 ج_1$

اِس لیے $\frac{ب_1 ج_2}{ب_1 ج_1} = \frac{ب_1 ا_2}{ب_1 ا_1}$

یعنی $\frac{ب ج}{ب_1 ج_1} = \frac{ب ا}{ب_1 ا_1}$ .... (۱)

اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ $\frac{ب ا}{ب_1 ا_1} = \frac{ا ج}{ا_1 ج_1}$ .... (۲)

(۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{ب ج}{ب_1 ج_1} = \frac{ج ا}{ج_1 ا_1} = \frac{ا ب}{ا_1 ب_1}$، جو ثابت کرنا تھا۔

۲۴۔ مسئلہ۔ اگر ایک مثلث کے تین ضلعے دوسرے مثلث کے تین ضلعوں کے متناسب ہوں تو متناظر اضلاع کے مقابل کے زاویے مساوی ہونگے۔

مثلثات ا ب ج اور $ا_1 ب_1 ج_1$ میں $\frac{ب ج}{ب_1 ج_1} = \frac{ج ا}{ج_1 ا_1} = \frac{ا ب}{ا_1 ب_1}$

ثابت کرنا ہے کہ $\angle ا = \angle ا_1$، $\angle ب = \angle ب_1$ اور (لازماً) $\angle ج = \angle ج_1$

$ب_1 ا_1$ پر نقطہ $ا_2$ ایسا لو کہ $ب_1 ا_2 = ب ا$ اور $ب_1 ج_1$ پر نقطہ $ج_2$ ایسا لو کہ $ب_1 ج_2 = ب ج$۔

$ا_2 ج_2$ کو ملاؤ۔

چونکہ حسب مفروض $\frac{ب ا}{ب_1 ا_1} = \frac{ب ج}{ب_1 ج_1}$

اس لیے $\frac{ب_1 ا_2}{ب_1 ا_1} = \frac{ب_1 ج_2}{ب_1 ج_1}$ (حسب عمل)

اس لیے $ا_2 ج_2 \parallel ا_1 ج_1$

یعنی مثلثات $ب_1 ا_2 ج_2$ اور $ب_1 ا_1 ج_1$ میں $\angle ب_1 ا_2 ج_2 = \angle ب_1 ا_1 ج_1$

اور $\angle ب_1 ج_2 ا_2 = \angle ب_1 ج_1 ا_1$

اس لیے یہ مثلثات تساوی الزوایا ہیں۔

اس لیے $\frac{ب_1 ا_2}{ب_1 ا_1} = \frac{ا_2 ج_2}{ا_1 ج_1}$

یعنی $\frac{ب ا}{ب_1 ا_1} = \frac{ا_2 ج_2}{ا_1 ج_1}$

لیکن حسب مفروض $\frac{ب ا}{ب_1 ا_1} = \frac{ا ج}{ا_1 ج_1}$

اس لیے $\frac{ا_2 ج_2}{ا_1 ج_1} = \frac{ا ج}{ا_1 ج_1}$ یعنی $ا_2 ج_2 = ا ج$

اس لیے مثلث ب ا ج کے ضلعے بالترتیب مثلث $ب_1 ا_2 ج_2$ کے ضلعوں کے مساوی ہیں۔

اس لیے یہ مثلثات آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں۔

اس لیے $\angle ب ا ج = \angle ب_1 ا_2 ج_2 = \angle ب_1 ا_1 ج_1$

اور $\angle ب ج ا = \angle ب_1 ج_2 ا_2 = \angle ب_1 ج_1 ا_1$

اور $\angle ب = \angle ب_1$

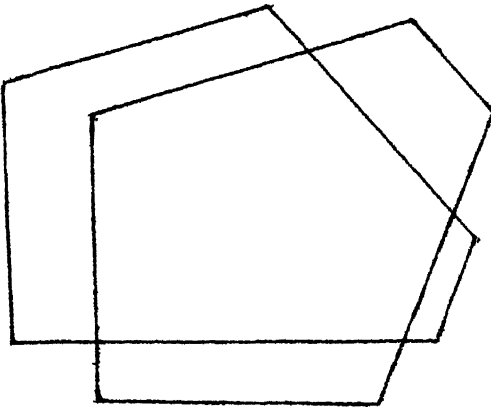
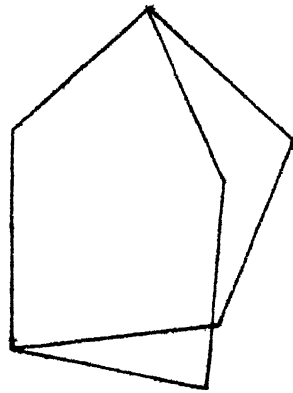
پس ثابت ہوا کہ مثلثات ا ب ج اور $ا_1 ب_1 ج_1$ تساوی الزوایا ہیں۔

۲۵۔ متشابہ اشکال پر نوٹ۔ تعریف سے ظاہر ہے کہ متشابہ اشکال کے لیے دو شرائط کا ایک ساتھ پورا ہونا ضروری ہے۔

(۱) ایک شکل کے زاویے ایک ہی ترتیب میں جدا جدا دوسری شکل کے زاویوں کے مساوی ہوں۔

(۲) ایک شکل کے ضلعے متناسب ہوں دوسری شکل کے نظیر کے ضلعوں کے۔

دفعات ۲۳ اور ۲۴ سے ظاہر ہے کہ مثلثات کی صورت میں مندرجۂ بالا شرائط میں سے کسی ایک شرط کے پورا ہونے پر دوسری شرط لازماً خود بخود پوری ہوتی ہے لیکن تین سے زیادہ ضلعوں والی اشکال کی صورت میں ان کے باہم متشابہ ہونے کے لیے دونوں شرائط کا ایک ساتھ پورا ہونا ضروری ہے۔

اس امر کی توضیح اشکال ذیل سے ہوتی ہے۔

شکل ۱

شکل ۲

شکل ۱ میں ایسے دو کثیر الاضلاع دیے گئے ہیں جو شرط (۱) کو پورا کرتے ہیں اور شرط (۲) کو پورا نہیں کرتے۔ شکل سے ظاہر ہے کہ یہ کثیر الاضلاع متشابہ نہیں ہیں۔

شکل ۲ میں ایسے دو کثیر الاضلاع دیے گئے ہیں جو شرط (۲) کو پورا کرتے ہیں لیکن شرط (۱) کو پورا نہیں کرتے۔ شکل سے ظاہر ہے کہ یہ کثیر الاضلاع بھی متشابہ نہیں ہیں۔

اس امر کی ایک اور سادہ مثال ذیل میں درج ہے۔

ایک مربع اور مستطیل متساوی الزوایا ہیں لیکن اُن کے نظیر کے اضلاع متناسب نہیں ہیں۔ اس لیے یہ دو اشکال متشابہ نہیں ہیں۔ نیز ایک مربع اور معین میں ضلعے متناسب ہیں لیکن اشکال متساوی الزوایا نہیں ہیں اس لیے یہ بھی متشابہ نہیں ہیں۔

امثلہ ۳

(۱) مثلث اب ج میں لاما متوازی ہے ب ج کے اور اضلاع اب، اج نقاط لا، ما پر ملتا ہے

(ا) اگر اب = ۴٫۴"، ب ج = ۶٫۳"، الا = ۲٫۱" تو لاما معلوم کرو۔ [جواب ۱٫۲"]

(ب) اگر ب ج = ۷٫۷ سم، لاما = ۵٫۵ سم، الا = ۵٫۴ سم تو اب معلوم کرو۔ [جواب ۹٫۹ سم]

(۲) مثلث اب ج میں ا = ۴"، ب = ۳٫۵"، ج = ۵٫۴" قاعدہ کے سروں میں سے خطوط ب د اور ج ع مقابل کے اضلاع تک کھینچے گئے ہیں اور وہ ایک دوسرے کو ن پر قطع کرتے ہیں اگر ع ن : ن ج = د ن : ن ب = ۲ : ۵ تو ع د، اع اور ج د کے طول معلوم کرو۔ [جواب ۸٫۵"، ۸٫۱"، ۴٫۲"]

(۳) ثابت کرو کہ مثلث کے دو ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے والا خط قاعدہ کا نصف ہے۔

(۴) ایک دائرہ کے دو وتر اب اور ج د ایک دوسرے کو نقطہ ط پر قطع کرتے ہیں ثابت کرو کہ اط × ط ب = ج ط × ط د

(۵) ایک بیرونی نقطہ و سے دائرہ کا مماس وت کھینچا گیا ہے اور و میں سے گزرنے والا کوئی قاطع دائرہ کو ا اور ب پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

و ا × و ب = وت۲۔

(۶) مثلث اب ج کے اندرونی اور جانبی دائروں کے مرکز معمولی ترقیم کے مطابق س، س۱، س۲، س۳ ہیں۔ ثابت کرو کہ

(ا) ج س × ج س۳ = اج × ب ج

(ب) اس × س س۱ = ب س × س س۲

= ج س × س س۳

(۷) مثلث اب ج کا اندرونی مرکز س ہے، س میں سے ایک خط

کھینچا گیا ہے۔ جو ے ا پر عمود ہے اور ا ب، ا ج سے بالترتیب د، ع پر ملتا ہے
ثابت کرو کہ ب د × ج ع = ے د²

(۸) مثلث ا ب ج کے راسوں سے مقابل کے اضلاع پر عمود ا د، ب ع، ج ف نکالے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلثات ا ع ف، ب د ف، ج د ع میں سے ہر ایک مثلث ا ب ج کے متشابہ ہے۔ اس کی مدد سے مثلث د ع ف کے اضلاع کے طول مثلث ا ب ج کے اضلاع اور زاویوں کی رقوم میں معلوم کرو۔
[جواب ع ف = لُ جم ا]

(نوٹ۔ مثلث د ع ف کو مثلث ا ب ج کا مثلثِ پائین کہتے ہیں)۔

(۹) مثلث ا ب ج بناؤ جس میں < ا = ۹۰°، ب : جَ = ۳ : ۴ اور محیط = ۱۸ اسم ضلعوں کے طول محسوب کرو۔ [جواب اَ = ۵ر۷ سم، بَ = ۵ر۴ سم، جَ = ۰ر۶ سم]

(۱۰) مثلث ا ب ج میں < ا قائمہ ہے اور ا د وتر ب ج پر عمود ہے ثابت کرو کہ مثلثات ا ب د، ج ا د، ج ب ا باہم متشابہ ہیں اور اس کی مدد سے ثابت کرو کہ

(۱) ا د² = ب د × د ج
(۲) ا ب² = ب د × ب ج
(۳) ا ج² = ج د × ج ب
(۴) ا ب² + ا ج² = ب ج²
(۵) ب د : د ج = ا ب² : ا ج²

(۱۱) مثلث ا ب ج میں ا د عمود ہے ب ج پر اور ا ع مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ کا قطر ہے، ثابت کرو کہ مثلثات ا ج د اور ا ع ب باہم متشابہ ہیں اور اس سے اخذ کرو کہ ا ب × ا ج = ا د × ا ع

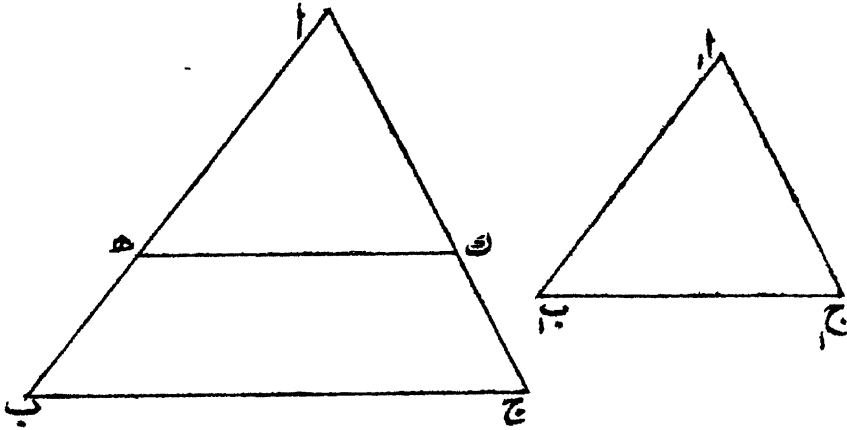
(۱۲) مثلث ا ب ج کے زاویہ ا کا اندرونی ناصف ضلع ب ج سے لا پر اور مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ سے ما پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ مثلثات ا ج لا اور ا ما ب باہم متشابہ ہیں اور اس سے اخذ کرو کہ ا ب × ا ج = ا لا × ا ما

(۱۳) ایک شخص جس کا قد ۶ فٹ ہے ایک روشنی کے کھمبے سے ۳۲ فٹ کے

فاصلہ پر کھڑا ہے اور اُس کے سایہ کا طول ۸ فٹ ہے۔ بتاؤ کہ روشنی زمین سے کتنی بلندی پر ہے۔ [جواب ۳۱ فٹ]

(۱۴) ایک شخص ایک نہر کی چوڑائی معلوم کرنا چاہتا ہے۔ اُس نے نہر کے ایک کنارہ پر ۴ ½ فٹ اونچی سلاخ نصب کی۔ پھر وہ اس کنارہ سے عموداً ۲۰ فٹ پیچھے ہٹا تو سلاخ کی چوٹی اور مقابل کا کنارہ ایک سیدھ میں دکھائی دیے۔ اگر اُس شخص کی آنکھ کی اونچائی ۵ فٹ ۸ انچ ہو تو نہر کی چوڑائی معلوم کرو۔ [جواب ۔ ۶۰ فٹ]

(۱۵) دو انتصابی کھمبے ۵ افٹ اور ۱۲ فٹ اونچے ہیں۔ ہر ایک کی چوٹی کو دوسرے کھمبے کے قدم سے رسیوں کے ذریعہ ملایا گیا ہے۔ رسیوں کے نقطۂ تقاطع کی بلندی سطح زمین سے معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ بلندی کھمبوں کے درمیانی فاصلہ پر منحصر نہیں ہے۔ [جواب $\frac{۲۰}{۳}$ فٹ]

۲۶ - مسئلہ۔ اگر دو مثلثوں میں ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے مساوی ہو اور اِن مساوی زاویوں کے گرد کے اضلاع متناسب ہوں تو مثلثات متشابہ ہونگے۔

مثلثات ا ب ج اور ا, ب, ج, میں ∠ ا = ∠ ا, اور

$\frac{\text{ا ب}}{\text{ا, ب,}} = \frac{\text{ا ج}}{\text{ا, ج,}}$ ثابت کرنا ہے کہ یہ مثلثات متشابہ ہیں۔

ا ب پر نقطہ ھ ایسا لو کہ ا ھ = ا, ب, اور ا ج پر نقطۂ ك ایسا لو کہ

اک = ا,ج, -
ھک کو ملاؤ۔
مثلثات اھک، ا,ب,ج, میں

∠ا = ∠ا,

اھ = ا,ب,
اور اک = ا,ج,
∴ △ اھک = △ ا,ب,ج,

حسب مفروض $\frac{\text{اب}}{\text{ا,ب,}} = \frac{\text{اج}}{\text{ا,ج,}}$

اِس لیے $\frac{\text{اب}}{\text{اھ}} = \frac{\text{اج}}{\text{اک}}$ حسب عمل

اس لیے ھک متوازی ہے ب ج کے
اس لیے ∠ اب ج = ∠ اھک = ∠ ا,ب,ج,
اور ∠ اج ب = ∠ اک ھ = ∠ ا,ج,ب,
اس لیے مثلثات اب ج اور ا,ب,ج متساوی الزوایا ہیں لہٰذا متشابہ ہیں۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

امثلہ

(۱) مثلث اب ج میں کوئی خطِ مستقیم قاعدہ کے متوازی ہے اور باقی اضلاع سے لا اور ما پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ اسے گزرنے والا وسطانیہ خط لا ما کی تنصیف کرتا ہے۔

(۲) مثلثات اب ج اور ا,ب,ج, متشابہ ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن کے حائط دائروں کے نصف قطروں کی نسبت نظیر کے اضلاع کی نسبت کے مساوی ہے۔

(۳) ثابت کرو کہ متشابہ مثلثات میں نظیر کے راسوں سے مقابل کے اضلاع پر نکالے ہوئے عمودوں کی نسبت نظیر کے ضلعوں کی نسبت کے مساوی ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ متشابہ مثلثات کے اندرونی دائروں کے نصف قطروں کی نسبت نظیر کے ضلعوں کی نسبت کے مساوی ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ مثلث کے ضلعوں کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والے دائرہ کا قطر مثلث کے حائط دائرہ کے نصف قطر کے مساوی ہے۔

(۶) مثلث ا ب ج مساوی الاضلاع ہے۔ ہر ضلع کا طول لَ ہے۔ ضلع ب ج کو دونوں جانب خارج کرکے اس پر دو نقطے ن اور ق ایسے لیے گئے ہیں کہ ب ن = ج ق = لَ اور ا ن اور ا ق کو ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ

(۱) ن ق : ن ا = ن ا : ن ب

(۲) ن ا² = ۳ لَ²

(۷) دو دائرے جن کے نصف قطر ل۱ اور ل۲ ہیں ایک دوسرے کو نقطہ ا پر خارجاً مس کرتے ہیں۔ اور ان دائروں کا ایک مشترک مماس اُن کو ف اور ق پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ∠ ف ا ق قائمہ ہے

اور ف ق² = ۴ ل۱ ل۲

(۸) دو دائرے ایک دوسرے کو ا پر خارجاً مس کرتے ہیں اور ان کا ایک مشترک مماس ف ق مرکزوں کے خط سے س پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ (۱) مثلثات س ا ف اور س ق ا متشابہ ہیں۔

(۲) س ا² = س ف × س ق

(۹) مثلثات ا ب ج اور ا۱ ب۱ ج۱ میں ا ب / ا۱ ب۱ = ا ج / ا۱ ج۱

اور ∠ ب = ∠ ب۱، اگر ∠ ج ≠ ∠ ج۱ تو ثابت کرو کہ

∠ ج + ∠ ج۱ = دو قائمے۔

چونکہ ∠ ج ≠ ∠ ج۱ اس لیے ∠ ا ≠ ∠ ا۱

اب ا میں سے ایک خط ا ج۲ ایسا کھینچو کہ ∠ ب ا ج۲ = ∠ ب۱ ا۱ ج۱

فرض کرو کہ ا ج۲، ب ج سے ج۲ پر ملتا ہے۔

اب مثلثات ا ب ج۲ اور ا۱ ب۱ ج۱ متشابہ ہیں۔

اس لیے ا ب / ا۱ ب۱ = ا ج۲ / ا۱ ج۱

لیکن دیا گیا ہے کہ ا ب / ا۱ ب۱ = ا ج / ا۱ ج۱

یعنی ا ج۲ / ا۱ ج۱ = ا ج / ا۱ ج۱ یعنی ا ج۲ = ا ج

اس لیے ∠ ا ج ج۲ = ∠ ا ج۲ ج

اس لیے ∠ ا ج ب + ∠ ا ج۲ ب = ۲ قائمے۔

لیکن ∠ ا ج۲ ب = ∠ ا۱ ج۱ ب۱

اس لیے ∠ ا ج ب + ∠ ا۱ ج۱ ب۱ = ۲ قائمے۔

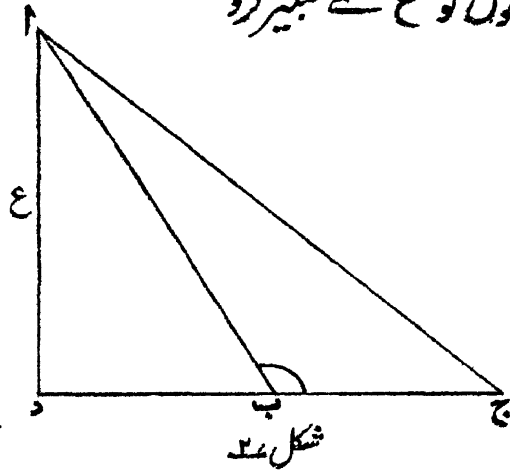
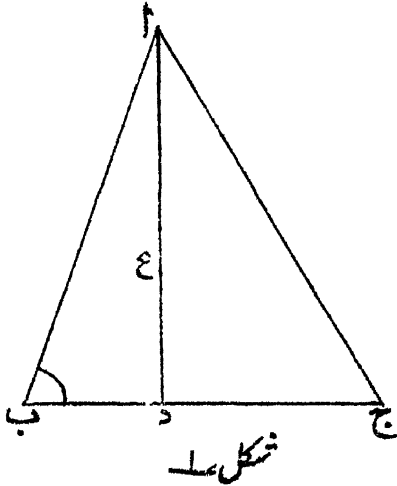
۳۷ — بعض ہندسی نتائج کو مثلثی نسبتوں کے استعمال سے نہایت عمدہ طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔

(۱) مثلث ا ب ج میں ا د عمود ہے ب ج پر۔ ا د کے طول کو ع سے تعبیر کرو

شکل ۱ شکل ۲

تب ع = جَ جب ∠ ا ب د

شکل ۱ میں ∠ ا ب د = ∠ ب اور شکل ۲ میں

∠ ا ب د = ۱۸۰° — ∠ ب

اس لیے دونوں صورتوں میں جب ∠ ا ب د = جب ب

∴ ع = جَ جب ب

اسی طرح سے ع = بَ جب ج

$$\therefore \frac{\text{بَ}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جب ج}}$$

اسی طرح سے ثابت ہوسکتا ہے کہ $\frac{\text{جَ}}{\text{جب ج}} = \frac{\text{اَ}}{\text{جب ا}}$

$$\therefore \frac{\text{اَ}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جب ج}}$$

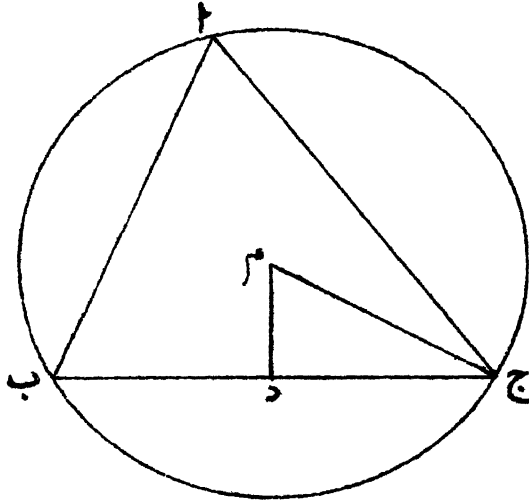
یعنی کسی مثلث کے اضلاع مقابل کے زاویوں کی جیوب کے متناسب ہوتے ہیں۔

(۲) مثلث اب ج کا رقبہ △ = $\frac{1}{2}$ اَ ع　　(دیکھو شکل بالا)

= $\frac{1}{2}$ اَ بَ جب ج

اسی طرح سے △ = $\frac{1}{2}$ بَ جَ جب ا = $\frac{1}{2}$ جَ اَ جب ب

پس حاصل ہوا کہ △ = $\frac{1}{2}$ اَ بَ جب ج = $\frac{1}{2}$ بَ جَ جب ا = $\frac{1}{2}$ جَ اَ جب ب

(۳) مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ کا مرکز م ہے، نصف قطر م ج کو

ر سے تعبیر کرو۔ فرض کرو کہ ب ج کا وسطی نقطہ د ہے۔ تب ∠ م د ج قائمہ ہے
اور ∠ د م ج = ∠ ا

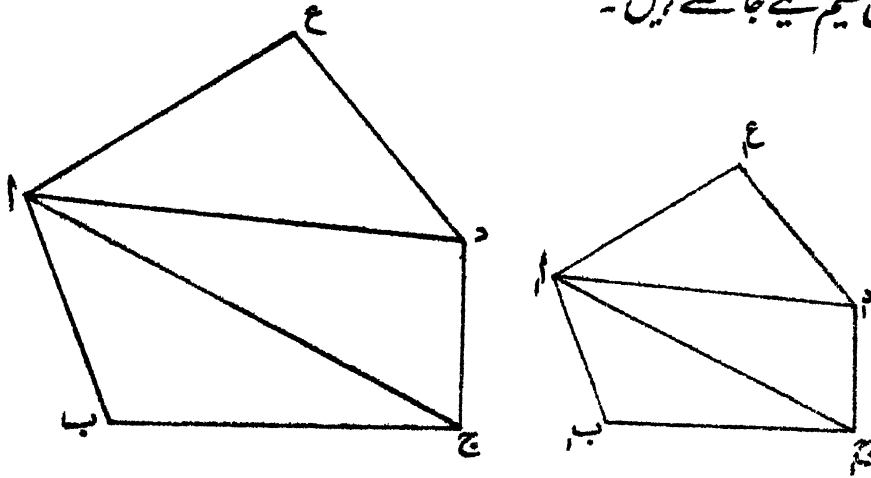
اس لیے　(د ج) / (م ج) = جب ا

یعنی　(اَ / ۲) / ر = جب ا

∴ ر = اَ / (۲ جب ا) = اَ بَ جَ / (۲ بَ جَ جب ا) = اَ بَ جَ / (۴ △)

نوٹ: شکل بالا میں مثلث ا ب ج کے تمام زاویے حادہ لیے گئے ہیں۔

کسی ایک زاویہ کے منفرجہ یا قائمہ ہونے کی صورت میں طالب علم خود اس نتیجہ کو حاصل کرے۔

۲۸ - مسئلہ - دو تشابہ کثیر الاضلاع متشابہ مثلثوں کی ایک ہی تعداد میں تقسیم کیے جا سکتے ہیں۔

کثیر الاضلاع ا ب ج د ع اور ا, ب, ج, د, ع, باہم متشابہ ہیں۔ ثابت کرنا ہے کہ ان میں سے ہر ایک کو ایک ہی تعداد کے متشابہ مثلثوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

ا ج، ا د، ا, ج,، ا, د, کو ملاؤ۔

چونکہ کثیر الاضلاع متشابہ ہیں

اس لیے $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا, ب,}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ب, ج,}}$ اور $\angle$ ب $= \angle$ ب,

اس لیے مثلثات ا ب ج اور ا, ب, ج, متشابہ ہیں۔

اس لیے $\angle$ ب ج ا $= \angle$ ب, ج, ا,

اور $\frac{\text{ج ا}}{\text{ج, ا,}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ب, ج,}}$

$= \frac{\text{ج د}}{\text{ج, د,}}$ (کیونکہ کثیر الاضلاع متشابہ ہیں)

نیز چونکہ $\angle$ ب ج د = $\angle$ ب، ج، د،

اس لیے $\angle$ ا ج د = $\angle$ ا، ج، د،

اب مثلثات ا ج د اور ا، ج، د، میں

$\angle$ ا ج د = $\angle$ ا، ج، د،

اور $\frac{\text{ا ج}}{\text{ا، ج،}} = \frac{\text{ج د}}{\text{ج، د،}}$

اس لیے مثلثات ا ج د اور ا، ج، د، باہم متشابہ ہیں۔

اسی طرح سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ مثلثات ا د ع اور ا، د، ع، بھی متشابہ ہیں۔

پس ثابت ہوا کہ متشابہ کثیر الاضلاع ا ب ج د ع اور ا، ب، ج، د، ع، کو ایک ہی تعداد کے متشابہ مثلثوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

نوٹ (۱)۔ اوپر کی شکل میں کثیر الاضلاع کے ضلعوں کی تعداد پانچ ہے اُس صورت میں جب کہ کثیر الاضلاع میں ضلعوں کی تعداد پانچ سے زیادہ ہو اسی قسم کے استدلال سے مسئلہ بالا ثابت ہو سکتا ہے۔

نوٹ (۲)۔ اس ثبوت میں ضمنی طور پر یہ بھی ثابت ہو گیا ہے کہ

$$\frac{\text{ب ج}}{\text{ب، ج،}} = \frac{\text{ا ج}}{\text{ا، ج،}} = \frac{\text{ا د}}{\text{ا، د،}}$$

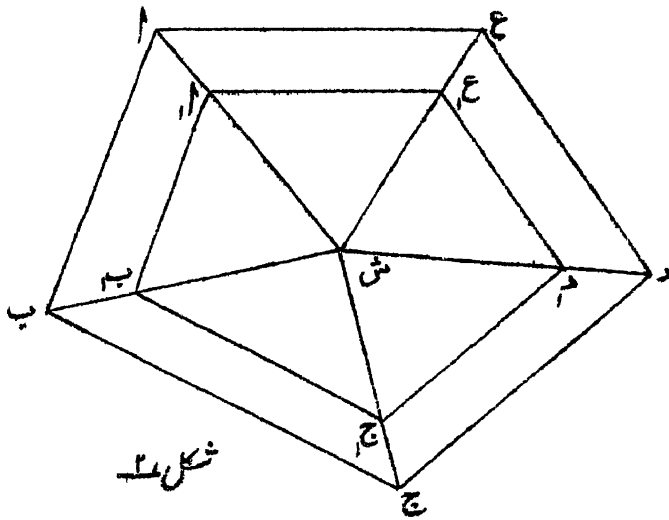
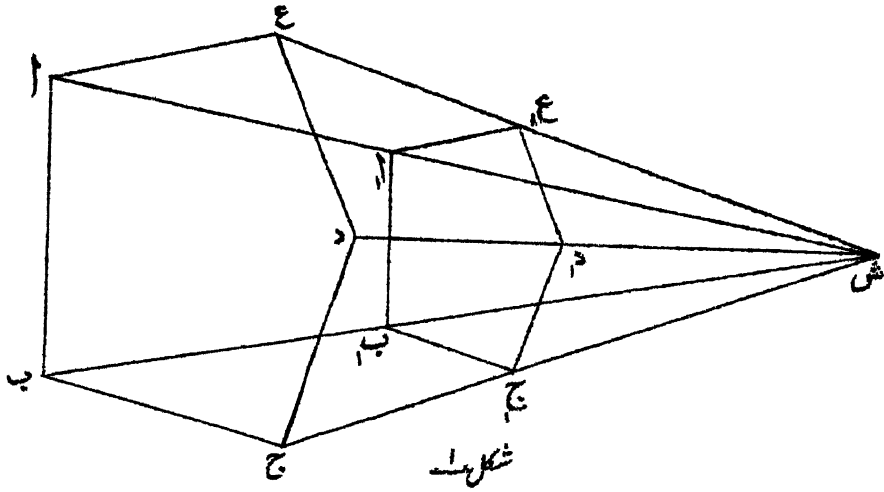
نوٹ (۳)۔ متناظر راسوں ا اور ا، کی بجائے کسی اور دو متناظر راسوں سے خطوط کھینچ کر کثیر الاضلاعوں کو متشابہ مثلثوں کی ایک ہی تعداد میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

۲۹۔ مسئلہ دو (غیر مساوی) متشابہ کثیر الاضلاعوں کو اس طرح رکھا جا سکتا ہے کہ اُن کے متناظر راسوں کو ملانے والے خط ایک ہی نقطہ میں سے گزریں۔

دو غیر مساوی متشابہ کثیر الاضلاع ا ب ج د ع اور ا، ب، ج، د، ع، کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ نظیر کے ضلعے ا ب، ا، ب، ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔ (ظاہر ہے کہ نظیر کے ضلعوں کے دوسرے جوڑے بھی

متوازی ہونگے)۔ ثابت کرنا ہے کہ خطوط ا ا، ب ب، ج ج، د د، ع ع ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

شکل ۱

شکل ۲

فرض کرو کہ ا ا، ب ب کا نقطہ تقاطع ش ہے، ش ج اور ش ج کو ملاؤ۔

مثلثات ش ا ب، ش ا ب متشابہ ہیں

$$\therefore \frac{\text{ش ب}}{\text{ش ب}_1} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا}_1\text{ ب}_1}$$

لیکن　　اب / ا۱ب۱ = ب ج / ب۱ ج۱

اب مثلثات ش ب ج اور ش ب۱ ج۱ میں

> ش ب ج = > ش ب۱ ج۱ (کیونکہ ب ج // ب۱ ج۱)

اور　　ش ب / ش ب۱ = ب ج / ب۱ ج۱

اِس لیے مثلثات ش ب ج اور ش ب۱ ج۱ متشابہ ہیں۔

اِس لیے > ب ش ج = > ب۱ ش ج۱

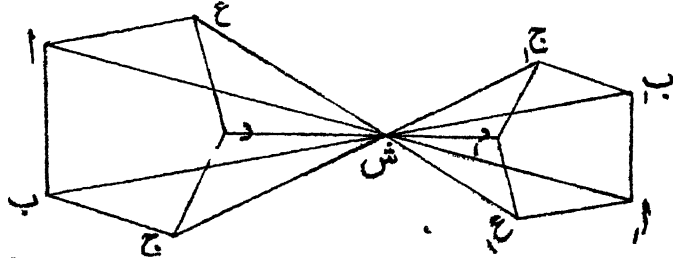
اِس لیے خطوط ش ج اور ش ج۱ ایک دوسرے پر منطبق ہیں۔

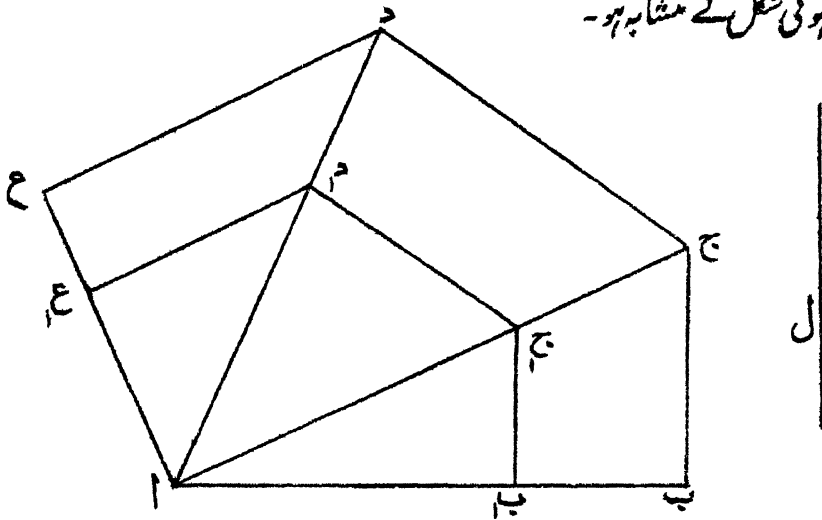
یعنی متناظر راسوں ج ج۱ کو ملانے والا خط نقطہ ش میں سے گزرتا ہے

اسی طرح سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ خطوط د د۱ اور ع ع۱ بھی نقطہ ش میں سے گزرتے ہیں۔ پس ثابت ہوا کہ متناظر راسوں کو ملانے والے خط ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

نوٹ (۱)۔ اگر دو متشابہ کثیر الاضلاع اس طرح رکھے جائیں کہ نظیر کے ضلعے متوازی ہوں تو یہ ہم وضع شکلیں کہلاتی ہیں اور اِن کے نظیر کے نقطوں کو ملانے والے خطوط کا نقطۂ تراکز ش اِن ہم وضع متشابہ اشکال کا مشابہت کا مرکز کہلاتا ہے۔

نوٹ (۲)۔ اگر متشابہ کثیر الاضلاعوں کو ہم وضع طور پر ایک دوسرے کے اندر رکھا جائے تو مشابہت کا مرکز دونوں شکلوں کے اندر ہوگا۔

نوٹ (۳)۔ دفعۂ ہذا کے مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے جو شکلیں کھینچی گئی ہیں ان میں نظیر کے اضلاع اب، ا۱ ب۱ ایک ہی سمت میں متوازی رکھے گئے ہیں۔ اگر نظیر کے اضلاع اب، ا۱ ب۱ کو مخالف سمتوں میں متوازی رکھا جائے تو متعلقہ شکل حسبِ ذیل ہوگی۔

اس صورت میں نظیر کے راسوں کو ملانے والے خط ایک ہی نقطہ میں سے گذرینگے۔

۳۰۔ مسئلہ عملی ۔ایک دیے ہوئے ضلع پر ایک شکل کھینچنا جو ایک دی ہوئی شکل کے متشابہ ہو۔

فرض کرو کہ ا ب ج د ع ایک دی ہوئی شکل ہے اور ل دیے ہوئے ضلع کا طول ہے ایک شکل بنانا ہے جو دی ہوئی شکل ا ب ج د ع کے متشابہ ہو اور جس میں ا ب کے نظیر کے ضلع کا طول ل ہو۔ ا ج، ا د کو ملاؤ۔

ا ب (ممدودہ بشرط ضرورت) پر ایک نقطہ ب۱ ایسا لو کہ ا ب۱ = ل

ب۱ ج۱ متوازی کھینچو ب ج کے جو ا ج سے ج۱ پر ملے۔

اور ج۱ د۱ متوازی کھینچو ج د کے جو ا د سے د۱ پر ملے۔

اور د۱ ع۱ متوازی کھینچو د ع کے جو ا ع سے ع۱ پر ملے۔

تب ا ب۱ ج۱ د۱ ع۱ مطلوبہ شکل ہوگی۔

ثبوت متشابہ مثلثوں کی مدد سے بآسانی دیا جاسکتا ہے مشق کے طور پر طالب علم ثبوت خود بہم پہنچائے۔

امثلہ ۵

(۱) ذوار بعۃ الاضلاع ا ب ج د اور ا ب۱ ج۱ د۱ متشابہ ہونگے اگر

(۱) ∠ ا = ∠ ا۱ اور اب/ا۱ب۱ = ب ج/ب۱ج۱ = ج د/ج۱د۱ = د ا/د۱ا۱

(۲) ∠ ا = ∠ ا۱، ∠ ب = ∠ ب۱ اور اب/ا۱ب۱ = ب ج/ب۱ج۱ = ا د/ا۱د۱

(۲) ذو اربعۃ الاضلاع ا ب ج د کے متشابہ ایک شکل بناؤ جس کے ہر ضلع کو اپنے نظیر کے ضلع کے ساتھ نسبت ۳ : ۴ ہو۔

(۳) ایک دیے ہوئے خط ا ب پر ایک نصف دائرہ بناؤ۔ اس نصف دائرہ کے اندر ایک مربع بناؤ جس کے دو راُس قوس پر ہوں اور دو قطر پر۔ اگر ا ب کا طول ۲ ر ہو تو مربع کا ضلع معلوم کرو۔ (جواب ۲ر/√۵)

(۴) ۴٫۲ً نصف قطر کا ایک قطاع دائرہ بناؤ جس کا مرکزی زاویہ ۶۰° ہو۔ اس کے اندر ایک مربع بناؤ اور مربع کے ضلع کا طول ناپو اور حساب لگانے سے اپنے جواب کو جانچو۔
[جواب ۲٫۱ (√۶ − √۲) انچ]

(۵) ایک منتظم مسدس ا ب ج د ع ف بناؤ جس کے ہر ضلع کا طول ۲٫۰ً ہو اور اُس کے اندر ایک مربع بناؤ جس کے دو ضلعے ا ب، د ع کے متوازی ہوں اور اُس کے راُس باقی اضلاع پر ہوں۔

(۶) ایک دیے ہوئے مثلث کے اندر ایک ایسا مثلث بناؤ جو ایک اور دیے ہوئے مثلث کے متشابہ ہو۔

(۷) ایک دیے ہوئے کثیر الاضلاع کے متشابہ ایک ایسا کثیر الاضلاع بناؤ جس کا محیط دیا گیا ہے۔

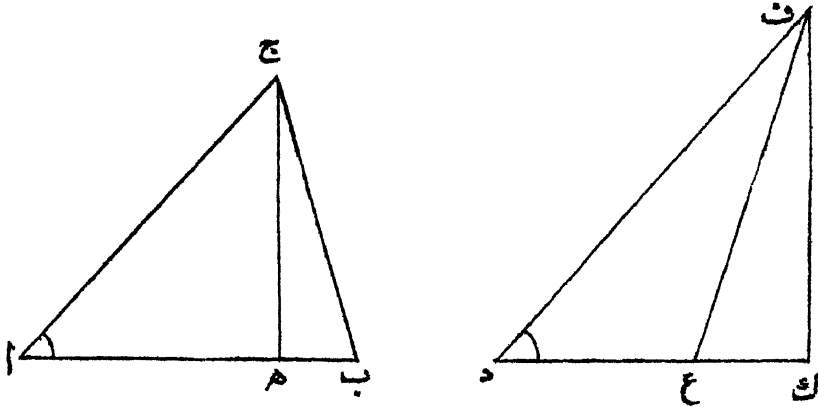
(۸) کثیر الاضلاع ا ب ج د ع کی سطح میں کوئی نقطہ و ہے۔ و ا، و ب، و ج، و د، و ع کو بالترتیب نقاط ا۱، ب۱، ج۱، د۱، ع۱ پر ایک ہی معلومہ نسبت میں تقسیم کیا گیا ہے ثابت کرو کہ کثیر الاضلاع ا۱ ب۱ ج۱ د۱ ع۱ دیے ہوئے کثیر الاضلاع ا ب ج د ع کے متشابہ ہے۔

(۹) کثیر الاضلاع ا ب ج د ع کی سطح میں و کوئی نقطہ ہے اور و ا یا و ا ممدودہ پر کوئی نقطہ ا۱ لیا گیا ہے۔ ا۱ ب۱، ب۱ ج۱، ج۱ د۱، د۱ ع۱ بالترتیب ا ب، ب ج، ج د، د ع کے

متوازی کھینچے گئے ہیں جو دب، دج، دد، دع سے بالترتیب ب، ج، د، ع پر ملتے ہیں۔ ا ع کو ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ کثیر الاضلاع ا ب ج د ع کثیر الاضلاع ا ب ج د ع کے متشابہ ہے۔

(۱۰) ثابت کرو کہ مخروط مضلع کی کوئی مستوی تراشش جو قاعدہ کے متوازی ہو قاعدہ کے متشابہ ہوتی ہے۔

(۱۱) متشابہ مشترک المحیط شکلوں کے حائط دائروں کے قطر نظیر کے ضلعوں کی نسبت میں ہوتے ہیں۔

۱۳۔ مسئلہ۔ اگر ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے مساوی ہو تو ان مثلثوں کے رقبے مساوی زاویوں کے گرد کے ضلعوں کے حاصل ضربوں کے متناسب ہونگے۔

مثلث ا ب ج کا زاویہ ا مثلث د ع ف کے زاویہ د کے مساوی ہے۔

ثابت کرنا ہے کہ $\frac{\triangle \text{ا ب ج}}{\triangle \text{د ع ف}} = \frac{\text{ا ب} \times \text{ا ج}}{\text{د ع} \times \text{د ف}}$

ج سے ا ب پر عمود ج ھ اور ف سے د ع پر عمود ف ك نکالو

مثلثات ج ا ھ، ف د ك متشابہ ہیں

اس لیے $\frac{\text{ج ھ}}{\text{ف ك}} = \frac{\text{ا ج}}{\text{د ف}}$

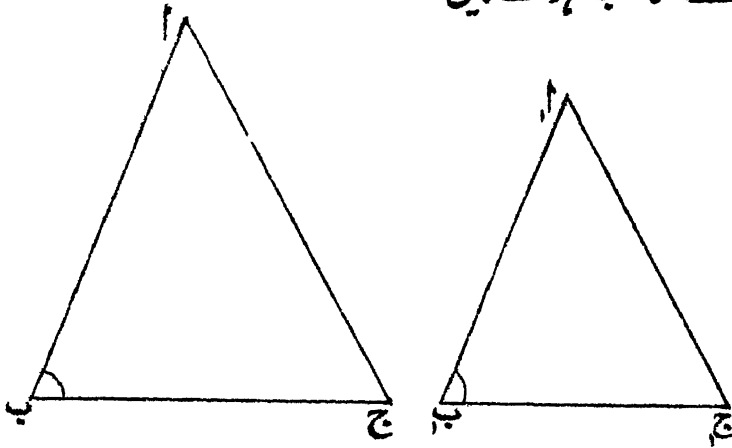
$$\triangle\ \text{ا ب ج} = \tfrac{1}{2}\ \text{ا ب} \times \text{ج ھ}$$

اور $$\triangle\ \text{د ع ف} = \tfrac{1}{2}\ \text{د ع} \times \text{ف ک}$$

$$\therefore\ \frac{\triangle\ \text{ا ب ج}}{\triangle\ \text{د ع ف}} = \frac{\text{ا ب} \times \text{ج ھ}}{\text{د ع} \times \text{ف ک}} = \frac{\text{ا ب} \times \text{ا ج}}{\text{د ع} \times \text{د ف}} \left[\text{کیونکہ}\ \frac{\text{ج ھ}}{\text{ف ک}} = \frac{\text{ا ج}}{\text{د ف}}\right]$$

نوٹ - اس مسئلہ کا متبادل ثبوت دفعہ ۲۷ مثال ۲ کے نتیجہ کی مدد سے حاصل کرو۔

نتیجہ صریح - اگر ایک متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ دوسرے متوازی الاضلاع کے ایک زاویہ کے مساوی ہو تو ان کے رقبے مساوی زاویوں کے گرد کے ضلعوں کے حاصل ضربوں کے متناسب ہونگے۔

۳۲ - مسئلہ - متشابہ مثلثوں کے رقبے متناظر اضلاع کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔

مثلثات ا ب ج اور ا۱ ب۱ ج۱ متشابہ ہیں۔

ثابت کرنا ہے کہ $$\frac{\triangle\ \text{ا ب ج}}{\triangle\ \text{ا}_1\text{ب}_1\text{ج}_1} = \frac{\text{ا ب}^2}{\text{ا}_1\text{ب}_1^2}$$

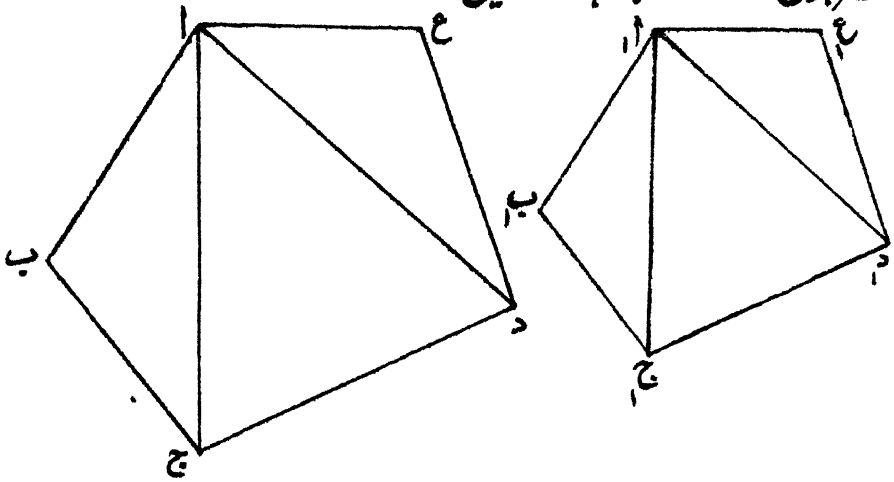
چونکہ مثلثات ا ب ج اور ا۱ ب۱ ج۱ متشابہ ہیں اس لیے $\angle$ ب = $\angle$ ب۱

اور $$\frac{\text{ب ج}}{\text{ب}_1\text{ج}_1} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا}_1\text{ب}_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

اب $$\frac{\triangle\ \text{ا ب ج}}{\triangle\ \text{ا}_1\text{ ب}_1\text{ ج}_1} = \frac{\text{ا ب} \times \text{ب ج}}{\text{ا}_1\text{ ب}_1 \times \text{ب}_1\text{ ج}_1}$$

$$= \frac{\text{ا ب}}{\text{ا}_1\text{ ب}_1} \times \frac{\text{ا ب}}{\text{ا}_1\text{ ب}_1}$$ بموجب (۱)

$$= \frac{\text{ا ب}^2}{\text{ا}_1\text{ ب}_1^2}$$ جو ثابت کرنا تھا۔

۳۳۔ مسئلہ۔ متشابہ کثیر الاضلاعوں کے رقبے متناظر اضلاع کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔

کثیر الاضلاع ا ب ج د ع اور ا۱ ب۱ ج۱ د۱ ع۱ متشابہ ہیں

ثابت کرنا ہے کہ $$\frac{\text{شکل ا ب ج د ع کا رقبہ}}{\text{شکل ا}_1\text{ ب}_1\text{ ج}_1\text{ د}_1\text{ ع}_1\text{ کا رقبہ}} = \frac{\text{ا ب}^2}{\text{ا}_1\text{ ب}_1^2}$$

ا ج، ا د اور ا۱ ج۱، ا۱ د۱ کو ملاؤ۔

چونکہ مثلثات ا ب ج اور ا۱ ب۱ ج۱ متشابہ ہیں

اس لیے $$\frac{\triangle\ \text{ا ب ج}}{\triangle\ \text{ا}_1\text{ ب}_1\text{ ج}_1} = \frac{\text{ا ب}^2}{\text{ا}_1\text{ ب}_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ (۱)$$

نیز چونکہ مثلثات ا ج د اور ا۱ ج۱ د۱ متشابہ ہیں

اس لیے $\frac{\triangle\ \text{ا ج د}}{\triangle\ \text{ا}_1\text{ ج}_1\text{ د}_1} = \frac{\text{ج د}^2}{\text{ج}_1\text{ د}_1^2}$ .... (۲)

نیز چونکہ مثلثات ا د ع اور ا۱ د۱ ع۱ متشابہ ہیں

اس لیے $\frac{\triangle\ \text{ا د ع}}{\triangle\ \text{ا}_1\text{ د}_1\text{ ع}_1} = \frac{\text{د ع}^2}{\text{د}_1\text{ ع}_1^2}$ .... (۳)

چونکہ کثیر الاضلاع اب ج د ع اور ا۱ ب۱ ج۱ د۱ ع۱ متشابہ ہیں

اس لیے $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا}_1\text{ ب}_1} = \frac{\text{ج د}}{\text{ج}_1\text{ د}_1} = \frac{\text{د ع}}{\text{د}_1\text{ ع}_1}$

اس لیے $\frac{\text{ا ب}^2}{\text{ا}_1\text{ ب}_1^2} = \frac{\text{ج د}^2}{\text{ج}_1\text{ د}_1^2} = \frac{\text{د ع}^2}{\text{د}_1\text{ ع}_1^2}$ .... (۴)

نتائج (۱)، (۲)، (۳)، (۴) کو ملانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ا ب}^2}{\text{ا}_1\text{ ب}_1^2} = \frac{\triangle\ \text{ا ب ج}}{\triangle\ \text{ا}_1\text{ ب}_1\text{ ج}_1} = \frac{\triangle\ \text{ا ج د}}{\triangle\ \text{ا}_1\text{ ج}_1\text{ د}_1} = \frac{\triangle\ \text{ا د ع}}{\triangle\ \text{ا}_1\text{ د}_1\text{ ع}_1}$$

$$= \frac{\triangle\ \text{ا ب ج} + \triangle\ \text{ا ج د} + \triangle\ \text{ا د ع}}{\triangle\ \text{ا}_1\text{ ب}_1\text{ ج}_1 + \triangle\ \text{ا}_1\text{ ج}_1\text{ د}_1 + \triangle\ \text{ا}_1\text{ د}_1\text{ ع}_1}$$

$$= \frac{\text{شکل اب ج د ع کا رقبہ}}{\text{شکل ا}_1\text{ ب}_1\text{ ج}_1\text{ د}_1\text{ ع}_1\text{ کا رقبہ}}$$ یہی ثابت کرنا تھا۔

امثلہ

(۱) مثلث اب ج میں اضلاع اب، ا ج کے وسطی نقطے د اور ع ہیں۔ ثابت کرو کہ △ ا د ع کا رقبہ منحرف د ب ج ع کے رقبہ کا $\frac{1}{3}$ ہے۔

(۲) ایک مثلث کے ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے سے جو مثلث بنتا ہے اُس کا رقبہ دیے ہوئے مثلث کے رقبہ کا کونسا حصہ ہے؟ (جواب $\frac{1}{4}$ حصہ)

(۳) مثلث اب ج میں قاعدہ ب ج کے متوازی خط لاما اس طرح

کھینچو کہ △ ا لا ما کا رقبہ منحرف لا ب ما ج کے رقبہ کا $\frac{9}{7}$ ہے۔
[اشارہ۔ ا لا : ا ب = ۳ : ۴]

(۴) مثلث ا ب ج میں زاویہ ا قائمہ ہے اور ا د عمود ہے ب ج پر۔ ثابت کرو کہ △ ب ا د : △ ا ج د = ا ب^2 : ا ج^2

(۵) متشابہ مشترک المحیط شکلوں کے رقبے اُن کے حائط دائروں کے قطروں کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔

(۶) ایک دائرہ کے اندر بنے ہوئے منتظم مسدس کا رقبہ اس دائرہ کے گرد بنے ہوئے منتظم مسدس کے رقبہ کا $\frac{3}{4}$ ہے۔

(۷) منحرف ا ب ج د کے اضلاع ا ب، ج د باہم متوازی ہیں۔ ا ج اور ب اد ایک دوسرے کو و پر قطع کرتے ہیں۔ اگر ا ب : ج د = ۲ : ۳ تو مثلثات و ا ب اور و ج د کے رقبوں کی نسبت معلوم کرو۔ (جواب $\frac{4}{9}$)

(۸) مثلث ا ب ج میں ∠ا = ۶۰° اور ب ع اور ج ف بالترتیب اضلاع ا ج، ا ب پر عمود ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ا ع ف کا رقبہ مثلث ا ب ج کے رقبہ کا $\frac{1}{4}$ ہے۔

(۹) ثابت کرو کہ متشابہ مثلثوں کے رقبوں میں وہی نسبت ہے جو

(۱) متناظر ارتفاعوں کے مربعوں میں ہے

(۲) متناظر وسطانیوں کے مربعوں میں ہے

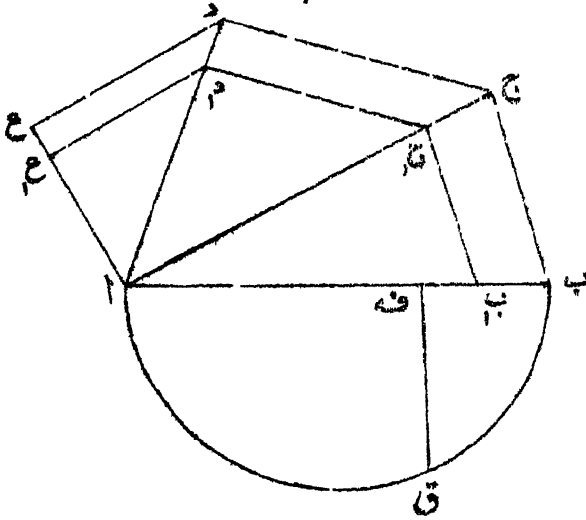
(۳) اندرونی دائروں کے قطروں کے مربعوں میں ہے

(۴) حائط دائروں کے قطروں کے مربعوں میں ہے۔

۳۴ - مسئلہ عملی - ایک کثیر الاضلاع بنانا جو ایک دیے ہوئے کثیر الاضلاع کے متشابہ ہو اور جس کے رقبہ کو دیے ہوئے کثیر الاضلاع کے رقبہ کے ساتھ ایک معلوم نسبت م : ن ہو۔

فرض کرو کہ دیا ہوا کثیر الاضلاع ا ب ج د ع ہے ا ب پر نقطہ ف ایسا معلوم کرو کہ

$$\frac{\text{ا ف}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$$

اب قطر پر دائرہ کھینچو اور ف سے اب پر عمود ف ق کھینچو جو دائرہ سے ق پر ملے ۔

اب پر نقطہ ب۱ ایسا معلوم کرو کہ اب۱ = اق

اب۱ پر ایک شکل اب۱ج۱د۱ع۱ بناؤ جو دی ہوئی شکل ابجدع کے متشابہ ہو۔ تب شکل اب۱ج۱د۱ع۱ مطلوبہ شکل ہوگی ۔

کیونکہ

$$\frac{\text{شکل اب۱ج۱د۱ع۱ کا رقبہ}}{\text{شکل ابجدع کا رقبہ}} = \frac{\text{اب۱}^2}{\text{اب}^2} = \frac{\text{اق}^2}{\text{اب}^2} = \frac{\text{اب} \times \text{اف}}{\text{اب}^2}$$

$$= \frac{\text{اف}}{\text{اب}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$$

۵۳ ـ مسئلہ عملی ـ ایک کثیر الاضلاع بنانا جو ایک دیے ہوئے کثیر الاضلاع ش کے متشابہ ہو اور رقبہ میں ایک اور دیے ہوئے کثیر الاضلاع ع کے مساوی ہو ۔

اشکال ش اور ع کو مربعوں میں تحویل کرو ۔

فرض کرو کہ ان مربعوں کے ضلعوں کے طول بالترتیب ل اور ل۱ ہیں اگر شکل ش کا ایک ضلع اب ہو تو ایک خط اب۱ ایسا معلوم کرو کہ

$\frac{\text{ا}_1\text{ب}_1}{\text{اب}} = \frac{\text{ل}_2}{\text{ل}_1}$ اور ا₁ب₁ پر ایک شکل ا₁ب₁ج₁د₁ع₁ ...
بناؤ جو شکل ش کے متشابہ ہو اور جن میں ا₁ب₁ اور اب متناظر ضلعے ہوں
تب ا₁ب₁ج₁د₁ع₁ .... مطلوبہ شکل ہوگی

کیونکہ $\frac{\text{شکل ا}_1\text{ب}_1\text{ج}_1\text{د}_1\text{ع}_1\text{... کا رقبہ}}{\text{شکل ش کا رقبہ}} = \frac{\text{ا}_1\text{ب}_1^2}{\text{اب}^2} = \frac{\text{ل}_2^2}{\text{ل}_1^2} = \frac{\text{شکل ع کا رقبہ}}{\text{شکل ش کا رقبہ}}$

اس لیے شکل ا₁ب₁ج₁د₁ع₁ .... کا رقبہ = شکل ع کا رقبہ

امثلہ

(۱) ایک مساوی الاضلاع مثلث بناؤ جو رقبہ میں ایک دیے ہوئے مثلث کے مساوی ہو۔

(۲) ایک مثلث مساوی الاضلاع بناؤ جس کا رقبہ دو دیے ہوئے مساوی الاضلاع مثلثوں کے رقبوں کے مجموعہ کے مساوی ہو۔

(۳) ایک مثلث بناؤ جس کے اضلاع ۴ : ۵ : ۷ کے تناسب ہوں اور جس کا رقبہ ۵ مربع انچ ہو۔

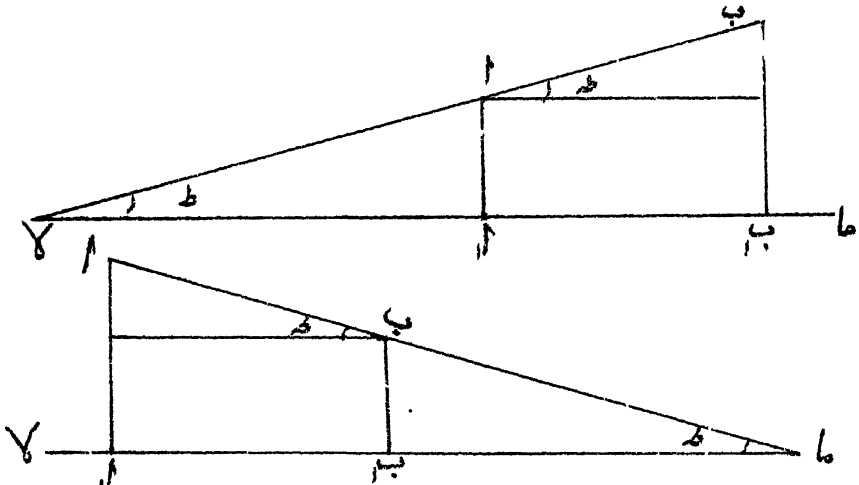
(۴) ذو اربعۃ الاضلاع اب ج د بناؤ جس میں اب = ۴ سمر، ب ج = ج د = ۵ سمر، د ا = ۳ سمر اور ∠ ا = ۹۰° اس کے متشابہ ایک ذو اربعۃ الاضلاع بناؤ جس کا رقبہ ۲″ ضلع پر کے مساوی الاضلاع مثلث کے رقبہ کے مساوی ہو۔

(۵) ایک شکل معیّن بناؤ جس کا ایک زاویہ ۶۰° کا ہو اور جس کا رقبہ ۲″ ضلع پر بنے ہوئے منتظم مسدس کے رقبہ کے مساوی ہو۔

(۶) ایک متساوی الساقین مثلث بناؤ جس کا راسی زاویہ ۵۰° کا ہو اور جس کا رقبہ اُس مثلث کے رقبہ کے مساوی ہو جس کے اضلاع ۲″، ۴″، ۵٫۳″ ہیں۔

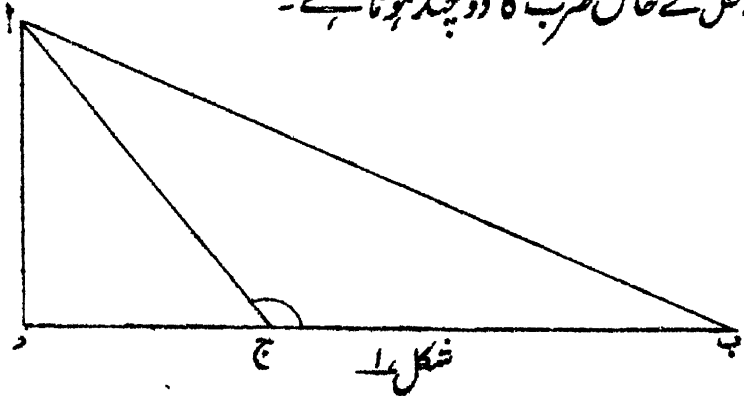
تیسرا باب

مثلث کے خواص

۳۶ ـ تعریف ـ اگر ایک محدود خط ا ب کے سِروں ا اور ب سے ایک معلومہ خط لا ما پر عمود ا ا، ب ب، نکالے جائیں تو محدود خط ا، ب، معلومہ خط ا ب کا ظل کہلاتا ہے خط لا ما پر ـ

اگر ا ب اور لا ما کا درمیانی حادّہ زاویہ ط ہو تو ا، ب، کا طول مساوی ہوگا ا ب × جم ط

۳۷ ـ مسئلہ ـ (فیثاغورث کے مسئلہ کی توسیع)

کسی مثلث کے ایک ضلع پر کا مربع بڑا ہوتا ہے، مساوی ہوتا ہے، چھوٹا ہوتا ہے باقی دو ضلعوں کے مربعوں کے مجموعہ سے بموجب اس کے کہ ان ضلعوں کا درمیانی زاویہ منفرجہ ہو، قائمہ ہو یا حادّہ ہو اور غیر مساوی ہونے کی صورت میں ان کا فرق دو ضلعوں میں سے ایک ضلع اور اس ضلع پر دوسرے ضلع کے ظل کے حاصل ضرب کا دوچند ہوتا ہے۔

شکل ۱

صورت اول - فرض کرو کہ مثلث ا ب ج میں $\angle$ ج منفرجہ ہے۔
ا سے ب ج ممدودہ پر عمود ا د نکالو تب ج د ظل ہے ج ا کا خط ب ج پر۔

یہ ثابت کرنا ہے کہ $\text{اب}^2 = \text{بج}^2 + \text{جا}^2 + 2\,\text{بج} \times \text{جد}$

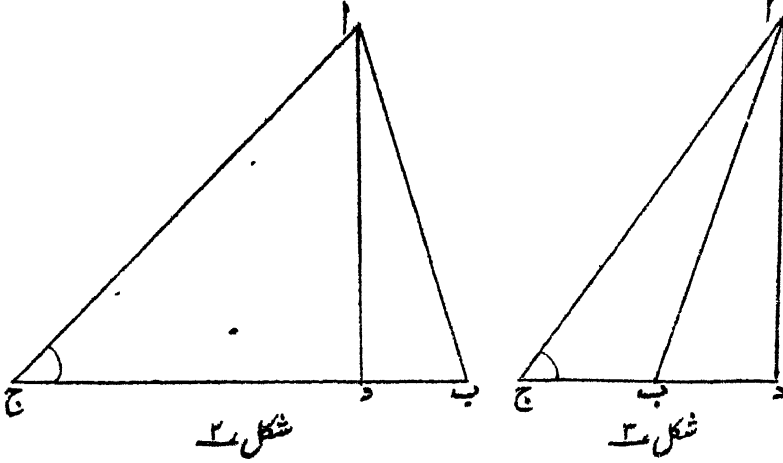
قائم الزاویہ مثلث ا ب د میں

$$\text{اب}^2 = \text{اد}^2 + \text{بد}^2 = \text{اد}^2 + (\text{بج} + \text{جد})^2$$
$$= \text{اد}^2 + \text{بج}^2 + \text{جد}^2 + 2\,\text{بج} \times \text{جد}$$
$$= \text{بج}^2 + \text{اد}^2 + \text{دج}^2 + 2\,\text{بج} \times \text{جد}$$
$$= \text{بج}^2 + \text{جا}^2 + 2\,\text{بج} \times \text{جد}$$

[کیونکہ مثلث اج د میں $\angle$ د قائمہ ہے]

صورت دوم - فرض کرو کہ مثلث ا ب ج میں $\angle$ ج حادّہ ہے۔
ا سے ب ج پر عمود ا د نکالو
تب ج د ظل ہے ج ا کا خط ب ج پر

یہ ثابت کرنا ہے کہ ا ب^2 = ب ج^2 + ج ا^2 − ۲ ب ج × د ج ۔

شکل ۲ شکل ۳

قائم الزاویہ مثلث ا ب د میں

ا ب^2 = ا د^2 + د ب^2 = ا د^2 + (ب ج ∽ د ج)^2

= ا د^2 + ب ج^2 + ج د^2 − ۲ ب ج × د ج

= ب ج^2 + ا د^2 + ج د^2 − ۲ ب ج × د ج

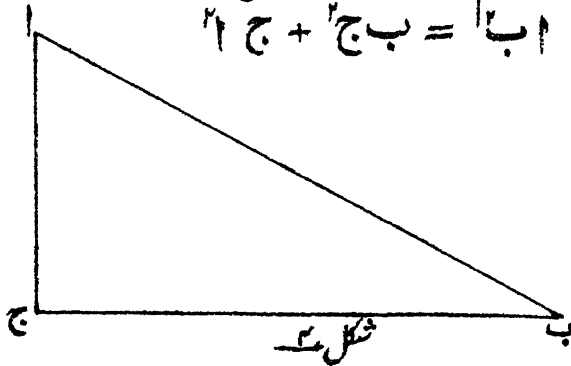
= ب ج^2 + ج ا^2 − ۲ ب ج × د ج

[کیونکہ مثلث ا ج د میں ∠ د قائمہ ہے]

صورت سوم۔ اگر مثلث ا ب ج میں ∠ ج قائمہ ہو تو

ا ب^2 = ب ج^2 + ج ا^2

ا
ج
ب

شکل ۴

یہ فیثاغورث کا مسئلہ ہے اور طالب علم اس کے ثبوت سے پہلے ہی سے

واقف ہے۔ ان تینوں صورتوں کو ملانے سے مسئلہ دفعہ ہذا ثابت ہوا۔

۳۸ – دفعہ گذشتہ کی صورت اول میں

ج د = ج ا × جم ا ج د = ج ا × جم (۱۸۰ – ∠ ا ج ب)

= – ج ا × جم ج

اس لیے صورت اول کا ضابطہ ا ب² = ب ج² + ج ا² + ۲ ب ج × ج د

ہو جاتا ہے ا ب² = ب ج² + ج ا² – ۲ ب ج × ج ا × جم ج ....(۱)

دفعہ گذشتہ کی صورت دوم میں

ج د = ج ا × جم ∠ ا ج د

= ج ا جم ج

اس لیے صورت دوم کا ضابطہ ا ب² = ب ج² + ج ا² – ۲ ب ج × ج د

ہو جاتا ہے ا ب² = ب ج² + ج ا² – ۲ ب ج × ج ا × جم ج ......(۲)

دفعہ گذشتہ کی صورت سوم میں ∠ ج قائمہ ہے اس لیے جم ج = ۰

اس لیے صورت سوم کا ضابطہ ا ب² = ب ج² + ج ا² ہو جاتا ہے

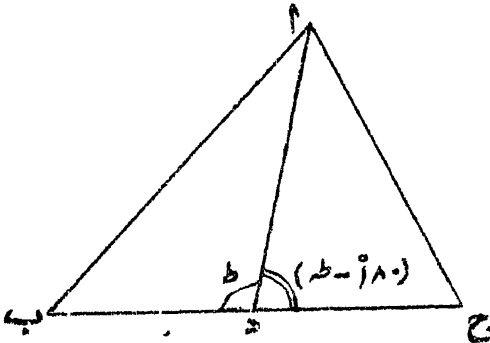
ا ب² = ب ج² + ج ا² – ۲ ب ج × ج ا × جم ج ......(۳)

ضابطوں (۱)، (۲)، (۳) کو علم مثلث کی ترقیم کے مطابق

شکل ج² = ا² + ب² – ۲ ا ب جم ج میں لکھا جا سکتا ہے اور یہ ضابطہ

درست ہے خواہ ج حادہ ہو یا قائمہ یا منفرجہ

۳۹۔ مسئلہ۔ اگر مثلث ا ب ج میں ا د ایک وسطانیہ ہو تو

ا ب² + ا ج² = ۲ ا د² + ۲ ب د²

مثلث ا ب د میں فرض کرو کہ ∠ ا د ب = ط

اس لیے ∠ ا د ج = ۱۸۰$^\circ$ − ط

تب ا ب^2 = ا د^2 + ب د^2 − ۲ ا د × ب د × جم ط ...... (۱)

نیز ا ج^2 = ا د^2 + د ج^2 − ۲ ا د × د ج × جم (۱۸۰$^\circ$ − ط)

= ا د^2 + د ج^2 + ۲ ا د × د ج جم ط

= ا د^2 + ب د^2 + ۲ ا د × ب د جم ط .... (۲)

(۱) اور (۲) سے

ا ب^2 + ا ج^2 = ۲ ا د^2 + ۲ ب د^2 جو ثابت کرنا تھا۔

امثلہ

(۱) مثلث ا ب ج میں ∠ ج = ۶۰$^\circ$ تو ثابت کرو کہ جَ^{2} = اَ^{2} + بَ^{2} − اَ بَ

اور اگر ∠ ج = ۱۲۰$^\circ$ تو ثابت کرو کہ جَ^{2} = اَ^{2} + بَ^{2} + اَ بَ

(۲) مثلث ا ب ج میں ضلع ب ج پر کوئی نقطہ لا ہے۔ اگر راس ا نقطہ لا پر منطبق ہو جائے تو دفعہ ۳۷ کی مدد سے حاصل کرو کہ ب ج^2 = ب لا^2 + لا ج^2 + ۲ ب لا . لا ج

(۳) مثلث ا ب ج میں اَ = $\sqrt{۲۱}$ ، بَ = ۴ اور جَ = ۵

∠ ا معلوم کرو (جواب ∠ ا = ۶۰$^\circ$)

(۴) ایک مثلث کے اضلاع ۷، ۸، ۹ سمر ہیں اس کے خطوطِ وسطی کے طول معلوم کرو۔

[جواب $\frac{\sqrt{۲۴۱}}{۲}$ ، ۷ ، $\frac{\sqrt{۱۴۵}}{۲}$ سمر]

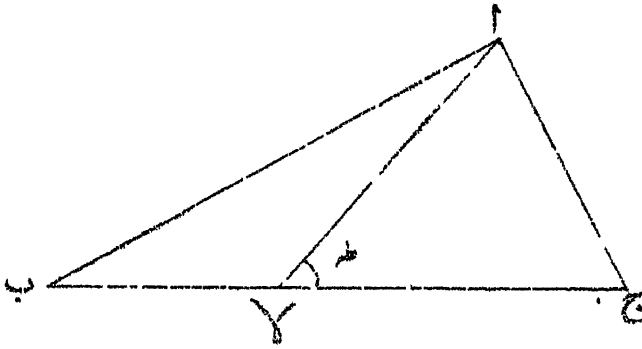
(۵) ایک مثلث کے خطوطِ وسطی کے طول ل، م، ن ہیں۔ اضلاع کے طول محسوب کرو۔

[جواب $\frac{۲}{۳}\sqrt{۲ م^2 + ۲ ن^2 - ل^2}$ ، .....]

(۶) ایک متوازی الاضلاع کے ضلعوں پر کے مربعوں کا مجموعہ اس کے وتروں پر کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

(۷) کسی ذو اربعۃ الاضلاع میں وتروں پر کے مربعوں کا مجموعہ متقابل کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے خطوط پر کے مربعوں کے مجموعہ کا دو چند ہوتا ہے۔

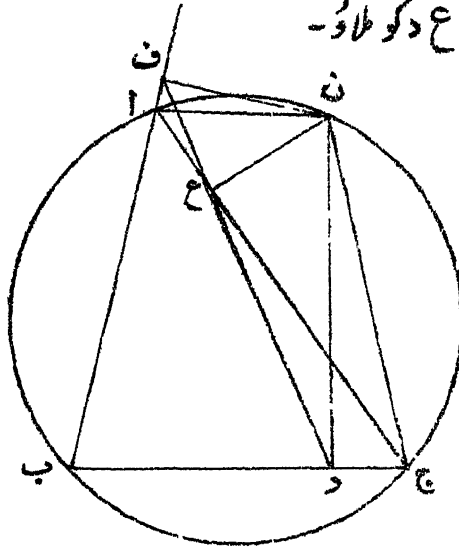
(۸) مثلث ا ب ج کے خطوط وسطی کا نقطۂ تراکز و ہے، ثابت کرو کہ
اب^2 + بج^2 + جا^2 = ۳ (وا^2 + وب^2 + وج^2)

(۹) مثلث ا ب ج میں ب ج پر نقطہ لا ایسا ہے کہ م × ب لا = ن × لا ج
ثابت کرو کہ م × اب^2 + ن × اج^2 = م × ب لا^2 + ن × لا ج^2 + (م + ن) × الا^2
(اپولونی اس کا مسئلہ)

[اشارہ - فرض کرو کہ ∠ الاج = ط
اب^2 = الا^2 + ب لا^2 + ۲ ب لا . الا . جم ط ...　　(۱)
اج^2 = الا^2 + لا ج^2 - ۲ لا ج . الا . جم ط .....　　(۲)
(۱) کو م سے اور (۲) کو ن سے ضرب دے کر جمع کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ یہ نتیجہ مسئلہ دفعہ ۳۹ کی عام شکل ہے]۔

۴۰ - مسئلہ - (سمسن کا خط) ایک مثلث کے حائطہ دائرہ پر کے کسی نقطہ سے مثلث کے اضلاع پر عمود نکالے جائیں تو عمودوں کے پائین ایک خطِ مستقیم میں واقع ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کے حائطہ دائرہ پر کوئی نقطہ ن ہے اور ن سے مثلث کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب پر عمود بالترتیب ن د، ن ع، ن ف کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرنا ہے کہ نقاط د، ع، ف

ہم خط ہیں۔

ف ع، ع د کو ملاؤ۔

چونکہ ∠ ن ف ا = ∠ ن ع ا = قائمہ

اس لیے نقاط ن، ف، ا، ع مشترک المحیط ہیں۔

اس لیے ∠ ن ع ف = ∠ ن ا ث = ∠ ن ج ب

(کیونکہ نقاط ن، ا، ب، ج مشترک المحیط ہیں)۔

نیز ∠ ن ع ج = ∠ ن د ج = قائمہ

اس لیے نقاط ن، ع، د، ج مشترک المحیط ہیں۔

اس لیے ∠ ن ع د تکمل ہے ∠ ن ج د کا

یعنی ∠ ن ع د تکمل ہے ∠ ن ع ف کا

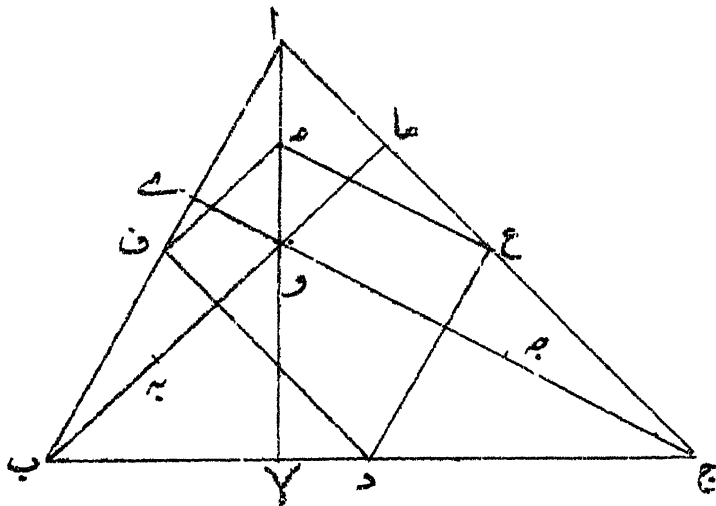
یعنی ف ع د خطِ مستقیم ہے۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

نوٹ - خط د ع ف کو مثلث ا ب ج کے لحاظ سے حائطِ دائرہ پر کے نقطہ ن کا خطِ پائین یا سمسن خط کہتے ہیں۔

مشقیں ۹

(۱) (ا) ایک نقطہ ن سے مثلث ا ب ج کے اضلاع پر عمود نکالے گئے ہیں۔

اگر عمودوں کے پائین خطِ مستقیم میں ہوں تو ثابت کرو کہ ق، مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ پر ہے۔
(ب) اگر نقطۂ ق اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ق سے مثلث ا ب ج کے اضلاع پر نکالے ہوئے عمودوں کے پائین خطِ مستقیم میں واقع ہوتے ہیں تو ق کا طریق معلوم کرو۔
(۲) مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ پر کے کسی نقطہ ن سے ب ج پر عمود ن د نکالا گیا ہے اور یہ حائط دائرہ سے مکرر ن، پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا خطِ پائین ا ن، کے متوازی ہے۔
(۳) کسی مثلث کے حائط دائرہ پر کے کسی دو نقطوں ن اور ق کے سمسن خطوں کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ کے مساوی ہوتا ہے جو ن ق کے محاذی دائرہ پر بنتا ہے۔
(۴) اگر چار خطوطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع سے جن میں سے کوئی دو باہم متوازی نہ ہوں چار مثلث بنائے جائیں تو ثابت کرو کہ ان مثلثوں کے چاروں حائط دائرے ایک مشترک نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔
(۵) کسی نقط کا سمسن خط نقطۂ مذکور کو مثلث کے عمودی مرکز سے ملانے والے خط کی تنصیف کرتا ہے۔

۴۱۔ مسئلہ ۔ (نو نقطی دائرہ) ۔ کسی مثلث میں اضلاع کے وسطی نقطے راسوں سے مقابل کے اضلاع پر کے عمودوں کے پائین اور مثلث کے عمودی مرکز کو راسوں سے ملانے والے خطوں کے وسطی نقطے مشترک المحیط ہوتے ہیں۔
فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کے وسطی نقطے بالترتیب د، ع، ف ہیں۔
اور راسوں ا، ب، ج سے مقابل کے اضلاع پر کے عمودوں کے پائین بالترتیب لا، ما، ے ہیں۔
نیز فرض کرو کہ اِن عمودوں کا نقطۂ تراکز یعنی مثلث کا عمودی مرکز و ہے اور ا و، ب و، ج و کے وسطی نقطے بالترتیب عہ، بہ، جہ ہیں۔
پہلے ہم ثابت کرینگے کہ عہ، بہ، جہ مشترک المحیط ہیں د، ع، ف کے ساتھ۔
چونکہ د اور ف بالترتیب وسطی نقطے ہیں ب ج اور ب ا کے

اس لیے دف // اج

نیز چونکہ عہ اور ف بالترتیب وسطی نقطے ہیں ا و اور اب کے
اس لیے عہ ف // ب ما
اس لیے دف اور عہ ف کا درمیانی زاویہ مساوی ہے اج اور ب ما کے
درمیانی زاویہ کے جو کہ قائمہ ہے

∴ ∠ دف عہ = قائمہ

اسی طرح ∠ د ع عہ = قائمہ

اس لیے نقطہ عہ نقاط د، ع، ف کے ساتھ مشترک المحیط ہے۔
اسی طرح سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ نقاط بہ اور جہ بھی مشترک المحیط ہیں
د، ع، ف کے ساتھ۔
پس ثابت ہوا کہ عہ، بہ، جہ مشترک المحیط ہیں د، ع، ف کے ساتھ۔
اب ہم ثابت کرینگے کہ نقاط لا، ما، ے بھی مشترک المحیط ہیں
د، ع، ف کے ساتھ۔
چونکہ ∠ عہ لا د قائمہ ہے اور نیز ∠ عہ ف د بھی قائمہ ہے۔
اس لیے نقاط عہ، ف، لا، د مشترک المحیط ہیں۔

یعنی نقطہ لا نقاط ع، ف، د میں سے گزرنے والے دائرہ پر واقع ہے لیکن نقاط ع، ف، د میں سے گزرنے والا دائرہ نقاط د، ع، ف میں سے گزرنے والا دائرہ ہے۔

پس معلوم ہوا کہ نقطہ لا نقاط د، ع، ف کے ساتھ مشترک المحیط ہے۔

اسی طرح سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ نقاط ما اور یے بھی نقاط د، ع، ف کے ساتھ مشترک المحیط ہیں۔ پس ثابت ہوا کہ لا، ما، یے مشترک المحیط ہیں د، ع، ف کے ساتھ۔

پس ثابت ہوا کہ کسی مثلث کے اضلاع کے وسطی نقطے، راسوں سے مقابل کے اضلاع پر کے عمودوں کے پائین اور راسوں کو مثلث کے عمودی مرکز سے ملانے والے خطوط کے وسطی نقطے مشترک المحیط ہوتے ہیں۔

تعریف: کسی مثلث کے مندرجۂ بالا نو نقطوں میں سے گزرنے والے دائرہ کو مثلث کا نو نقطی دائرہ کہتے ہیں اور اس دائرہ کے مرکز کو نو نقطی مرکز کہتے ہیں۔

۴۲ - مسئلہ - کسی مثلث میں (۱) نو نقطی مرکز، حائط مرکز اور عمودی مرکز کو ملانے والے خط کا وسطی نقطہ ہوتا ہے۔

اور (۲) نو نقطی دائرہ کا قطر مثلث کے حائط دائرہ کے نصف قطر کے مساوی ہوتا ہے۔

نیز (۳) ہندسی مرکز ہم خط ہوتا ہے حائط مرکز، نو نقطی مرکز اور عمودی مرکز کے ساتھ۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کا حائط مرکز س ہے، عمودی مرکز و ہے اور نو نقطی مرکز ن ہے۔

ثابت کرنا ہے کہ (۱) نقطہ ن خط س و کا نقطۂ تنصیف ہے اور (۲) نو نقطی دائرہ کا قطر حائط دائرہ کے نصف قطر س ا کے مساوی ہے اور نیز (۳) مرکز ثقل خط س و پر ہے۔

(۱) دفعہ گزشتہ کی ترقیم کے مطابق چونکہ نو نقطی دائرہ نقاط د اور لا میں سے گزرتا ہے۔

اس لیے نو نقطی مرکز دلا کے عمودی منصف پر ہوگا۔

اسی طرح سے نو نقطی مرکز ما ع کے عمودی منصف پر بھی ہوگا۔

یہ دونوں عمودی منصف وس کے وسطی نقطہ میں سے گزرتے ہیں -

پس وس کے وسطی نقطہ پر نونقطی مرکز ن ہوگا -

(۲) چونکہ نونقطی دائرہ نقاط د، لا، عہ میں سے گزرتا ہے اور چونکہ ∠ دلاعہ قائمہ ہے اس لیے عہ د نونقطی دائرہ کا ایک قطر ہے اس لیے عہ د نونقطی مرکز ن میں سے گزرتا ہے -

چونکہ وا اور وس کے وسطی نقطے بالترتیب عہ اور ن ہیں،

اس لیے عہ ن (جو نونقطی دائرہ کا نصف قطر ہے) متوازی ہے اور نصف ہے اس کا -

اس لیے نونقطی دائرہ کا قطر عہ د مساوی ہے اس کے جو حائط دائرہ کا نصف قطر ہے -

(۳) چونکہ عہ د متوازی ہے اس کے اور اعہ متوازی ہے س د کے

اس لیے اعہ مساوی ہے س د کے

اس لیے او دگنا ہے س د کا

فرض کرو کہ وسطانیہ ا د خط س و سے ث پر ملتا ہے
اب متشابہ مثلثات ا ث و اور د ث س میں

$$\frac{\text{ا ث}}{\text{د ث}} = \frac{\text{ا و}}{\text{د س}} = \frac{۲}{۱}$$

اس لیے وسطانیہ ا د کی داخلی تقسیم نسبت ۲ : ۱ میں ث پر ہوتی ہے۔
اس لیے ث مثلث ا ب ج کا ہندسی مرکز (مرکز ثقل) ہے۔
پس مسئلہ ثابت ہوا۔

نوٹ۔ مسئلہ بالا (۳) میں متشابہ مثلثات ا ث و اور د ث س سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{و ث}}{\text{ث س}} = \frac{\text{ا و}}{\text{د س}} = \frac{۲}{۱}$$

یعنی مثلث کا مرکز ثقل ث، عمودی مرکز و اور حائطہ مرکز س کو ملانے والے خط کی داخلی تقسیم نسبت ۲ : ۱ میں کرتا ہے۔

امثلہ ۱۰

(۱) دفعہ ۴۱ کے مسئلہ کو استعمال کرنے کے بغیر اسی دفعہ کی ترقیم کے مطابق ثابت کرو کہ

(ا) لا مشترک المحیط ہے عہ، بہ، جہ کے ساتھ
(ب) د مشترک المحیط ہے عہ، بہ، جہ کے ساتھ
(ج) عہ مشترک المحیط ہے لا، ما، ے کے ساتھ
(د) د مشترک المحیط ہے لا، ما، ے کے ساتھ

(۲) دفعہ ۴۳ کی شکل میں ثابت کرو کہ عہ ف د جہ مستطیل ہے۔
(۳) دفعہ ۴۳ کی شکل میں ثابت کرو کہ عہ د = بہ ع = جہ ف
(۴) ثابت کرو کہ ترقیم سابقہ کے مطابق ا د اور عہ س ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

(۵) معمولی ترقیم کے مطابق ثابت کرو کہ ا د = ۲ س جم ا

(۶) ایک مثلث کا قاعدہ اور راسی زاویہ دونوں معلوم ہیں ۔ مثلث کے نونقطی مرکز کا طریق معلوم کرو ۔

(۷) مثلث ا ب ج کے جانبی دائروں کے مرکز ہے، ہے، ہے ہیں ۔ ثابت کرو کہ مثلث ا ب ج کا حائط دائرہ مثلث ہے ہے ہے کا نونقطی دائرہ ہے اور اس سے حاصل کرو کہ مثلث ا ب ج کا حائط دائرہ مثلث ہے ہے ہے کے اضلاع کی تنصیف کرتا ہے ۔

(۸) مثلث ا ب ج کا عمودی مرکز د ہے ثابت کرو کہ مثلث ا ب ج کا نونقطی دائرہ مثلثات ا د ب، ب د ج اور ج د ا کا بھی نونقطی دائرہ ہے ۔

(۹) مثلث کا ایک راس، اور نونقطی دائرہ معلوم ہیں ۔ ثابت کرو کہ مثلث کے عمودی مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے ۔

(۱۰) ایک مثلث کا ایک راس، عمودی مرکز اور نونقطی دائرہ کا مرکز معلوم ہیں، مثلث بناؤ ۔

(۱۱) ایک مثلث کے دو راسی اور نونقطی دائرہ کا مرکز معلوم ہیں مثلث بناؤ ۔

(۱۲) ایک مثلث کا قاعدہ اور راسی زاویہ معلوم ہیں ۔ ثابت کرو کہ اس کے مثلث پائین کا ایک ضلع اور ایک زاویہ مستقل ہیں ۔

۳۴ ۔ **مسئلہ** ۔ مثلث ا ب ج کے زاویہ ا کا اندرونی منصف قاعدہ ب ج سے د پر ملے تو

$$ا ب \times ا ج = ا د^2 + ب د \cdot د ج$$

مثلث ا ب ج کا حائط دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ ا د ممدودہ حائط دائرہ سے ع پر ملتا ہے ۔ ج ع کو ملاؤ ۔

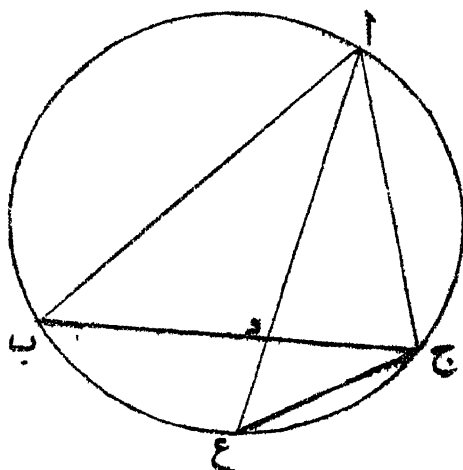
مثلثات ا ب د اور ا ع ج میں

$\angle$ ا ب د = $\angle$ ا ع ج

$\angle$ ب ا د = $\angle$ ع ا ج

$\therefore$ مثلثات ا ب د اور ا ع ج متشابہ ہیں ۔

$$\therefore \frac{\text{اب}}{\text{اع}} = \frac{\text{اد}}{\text{اج}}$$

$$\therefore \text{اب} \times \text{اج} = \text{اد} \times \text{اع}$$
$$= \text{اد} \,(\text{اد} + \text{دع})$$
$$= \text{اد}^2 + \text{اد} \times \text{دع}$$
$$= \text{اد}^2 + \text{بد} \times \text{دج}$$

[کیونکہ وتر اع اور ب ج ایک دوسرے کو د پر قطع کرتے ہیں]۔

پس مسئلہ ثابت ہوا

مشتق۔ اگر $\angle$ ا کا بیرونی منصف ب ج ممدودہ سے د پر ملے تو ثابت کرو کہ $\text{اب} \times \text{اج} = \text{بد} \times \text{جد} - \text{اد}^2$

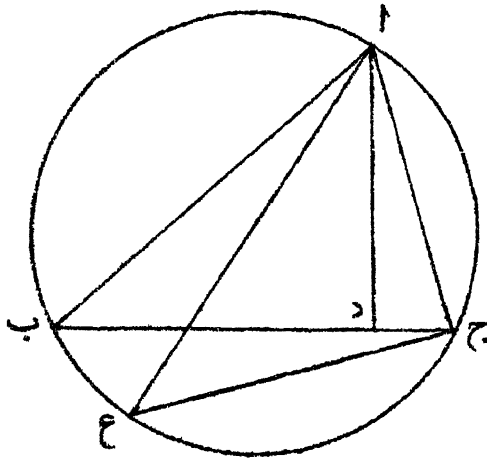
نوٹ:۔ اگر دفعہ بالا کی شکل میں اب = اج تو $\text{اج}^2 = \text{اد} \times \text{اع}$۔
اس نتیجہ کا عکس درست نہیں ہے کیونکہ اگر مثلث تساوی الساقین اب ج کے راس ا میں سے کوئی خط کھینچا جائے جو قاعدہ یعنی محدود خط ب ج سے د پر اور حائط دائرہ سے ع پر ملے تو

$$\text{اج}^2 = \text{اد} \times \text{اع}$$

۴۴۔ اگر مثلث اب ج کے راس ا سے ب ج پر عمود اد ہو

اور ا ع مثلث اب ج کے حائط دائرہ کا قطر ہو تو اب × اج = ا د × ا ع

ج ع کو ملاؤ

مثلثات اب د اور اع ج میں

∠ اب د = ∠ اع ج (کیونکہ یہ ایک ہی قوس کے اندر کے زاویے ہیں)

اور ∠ ا د ب = ∠ ا ج ع (کیونکہ ہر ایک قائمہ ہے)

اس لیے مثلثات اب د اور اع ج متشابہ ہیں

اس لیے $\frac{\text{اب}}{\text{اع}} = \frac{\text{اد}}{\text{اج}}$

اس لیے اب × اج = اد × اع - جو ثابت کرنا تھا۔

نوٹ:- اگر عمود ا د کو ع، سے تعبیر کیا جائے تو معمولی ترقیم کے مطابق اس مسئلہ کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں:-

بَ × جَ = ۲ ر × ع، جہاں ر حائط دائرہ کا نصف قطر ہے۔

نیز چونکہ مثلث اب ج کا رقبہ $\triangle = \frac{\text{اَ} \times \text{ع}}{۲}$

اس لیے ع، $= \frac{۲\triangle}{\text{اَ}}$

ع کی اس قیمت کو اوپر کے نتیجہ میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ب ج = ۲ م × \frac{۲\Delta}{أ}$$

یعنی حائط دائرہ کا نصف قطر م = $\frac{أ ب ج}{۴\Delta}$

(مقابلہ کرو دفعہ ۲۷ نتیجہ ۳ سے)

امثلہ ۱۱

(۱) مثلث ا ب ج کے ∠ ا کا داخلی ناصف قاعدہ ب ج سے د پر ملتا ہے۔ ا د کا طول محسوب کرو۔

معمولی ترتیم کے مطابق ب د = $\frac{ج أ}{ب + ج}$ اور د ج = $\frac{ب أ}{ب + ج}$

ازروئے دفعہ ۴۳، ب ج = ا د^۲ + ب د × د ج

$$= ا د^۲ + \frac{أ^۲ ب ج}{(ب + ج)^۲}$$

اس لیے ا د^۲ = ب ج $\left[۱ - \frac{أ^۲}{(ب+ج)^۲}\right]$ = ب ج $\left[\frac{(ب+ج+أ)(ب+ج-أ)}{(ب+ج)^۲}\right]$

اگر مثلث کے محیط یعنی أ + ب + ج کو ۲س سے تعبیر کیا جائے

تو ا د^۲ = $\frac{ب ج × ۲ س (۲ س - ۲ أ)}{(ب + ج)^۲}$

$$\therefore ا د = \frac{۲ \sqrt{ب ج س (س - أ)}}{(ب + ج)}$$

$$= \frac{۲ ب ج}{ب + ج} جم \frac{۱}{۲} ا \quad \text{کیونکہ جم } \frac{۱}{۲} = \sqrt{\frac{س (س - أ)}{ب ج}}$$

(۲) اگر مثلث ا ب ج کے زاویہ ا کا خارجی منصف ب ج سے م پر ملے تو ثابت کرو کہ

ا م = (۲ بَ جَ)/(جَ ~ بَ) × جب (ا/۲)

(۳) مثلث بناؤ جس کا قاعدہ راسی زاویہ اور باقی دو اضلاع کا حاصل ضرب معلوم ہیں۔

(۴) مثلث ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز س ہے اور ا کے مقابل کے جانبی دائرہ کا مرکز س۱ ہے۔ س س۱ ضلع ب ج سے د پر اور حائط دائرہ سے ف پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ

ا د × ا ف = ا س × ا س۱

(۵) △ ا ب ج میں ا ب ≠ ا ج اور ضلع ب ج پر نقطہ د اس طرح لیا گیا ہے کہ

ا ب × ا ج = ا د² + ب د × د ج

ثابت کرو کہ ا د زاویہ ب ا ج کا اندرونی ناصف ہے۔

فرض کرو کہ ا د مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ سے ع پر ملتا ہے۔

(دیکھو شکل دفعہ ۴۳)

تب ا د² + ب د × د ج = ا د² + ا د × د ع = ا د × ا ع

اس لیے ا ب × ا ج = ا د × ا ع

یعنی ا ب/ا د = ا ع/ا ج

اور ∠ ا ب د = ∠ ا ع ج

اس لیے امثلہ ۲ک سوال ۹ کی رو سے

یا تو ∠ ا د ب = ∠ ا ج ع .... (۱)

یا ∠ ا د ب + ∠ ا ج ع = ۲ قائمے .... (۲)

اب ہم ثابت کرینگے کہ نتیجہ (۲) ناممکن ہے

اگر ∠ ا د ب + ∠ ا ج ع = ۲ قائمے

تو ∠ ا ج ع = ∠ ا د ج یعنی ∠ ا ج د = ∠ ج ع ا = ∠ ج ب ا

یعنی　اب = اج جو شرائط سوال کے خلاف ہے۔

اس لیے ∠ ادب = ∠ اج ع

اس لیے ∠ با د = ∠ ع اج یعنی اد زاویہ باج کا اندرونی ناصف ہے۔

(۶) مثلث اب ج میں اب = اج، قاعدہ ب ج یا ب ج محدودہ پر کوئی نقطہ د ہے ثابت کرو کہ مثلثات اب د اور اج د کے حائط دائروں کے نصف قطر مساوی ہیں۔

(۷) سوال ۶ میں اگر اب اور اج مساوی نہ ہوں تو ثابت کرو کہ مثلثات اب د اور اج د کے نصف قطروں کی نسبت اب : اج کے مساوی ہے۔

(۸) ایک ذوار بعۃ الاضلاع اب ج د دائرہ کے اندر بنا ہوا ہے۔ دائرہ پر ایک نقطہ ن ایسا معلوم کرو کہ ن ا × ن ج = ن ب × ن د

(اشارہ۔ ن سے اج پر کا عمود = ن سے ب د پر کا عمود)

(۹) ایک مثلث کا قاعدہ اور راسی زاویہ دیے گئے ہیں۔ وہ مثلث بناؤ جس کے اضلاع کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہے۔

(۱۰) ایک دیے ہوئے دائرہ کے اندر ایک دیے ہوئے رقبہ والا مثلث بنایا گیا ہے ثابت کرو کہ تینوں ضلعوں کا حاصل ضرب مستقل ہے۔

(۱۱) ایک دائرہ کے وتر اب کا عمودی منصف قوس سے ج پر ملتا ہے اور قوس اج ب پر کوئی نقطہ د ہے، ثابت کرو کہ اج^2 = اد × دب + دج^2

اس کی مدد سے حاصل کرو کہ اد × دب بڑے سے بڑا ہوگا اگر نقطہ د نقطہ ج پر منطبق ہو۔

(۱۲) اب ج د ایک مشترک المحیط ذوار بعۃ الاضلاع ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{اج}}{\text{ب د}} = \frac{\text{اب} \times \text{اد} + \text{ج ب} \times \text{ج د}}{\text{با} \times \text{ب ج} + \text{دا} \times \text{د ج}}$$

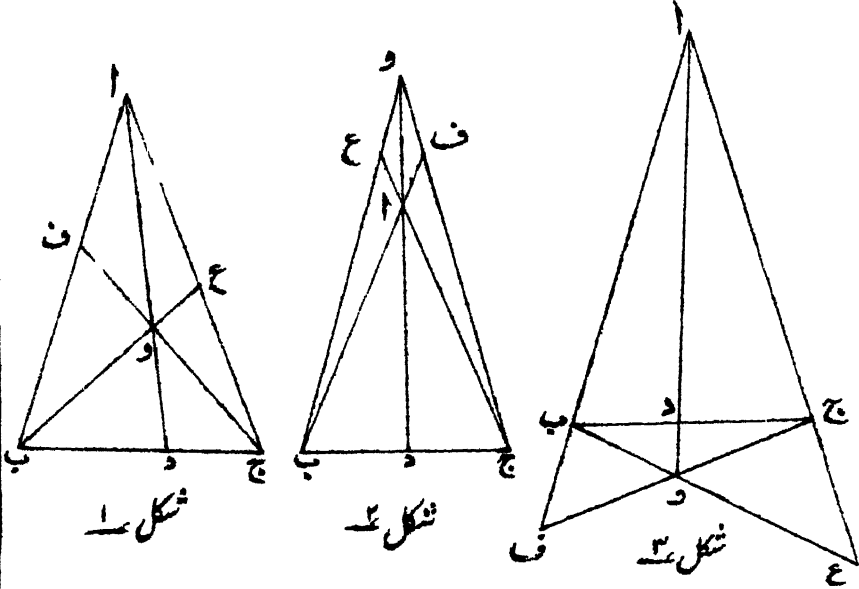
(۱۳) اب ج د ایک مشترک المحیط ذوار بعۃ الاضلاع ہے

اس کے حائط دائرہ پر کے کسی نقطہ ن سے اب، ب ج، ج د، د ا پر عمود نکالے گئے ہیں جن کے طول بالترتیب ع$_1$، ع$_2$، ع$_3$، ع$_4$ ہیں اور اسی نقطہ ن سے وتروں اج، ب د پر کے عمودوں کے طول بالترتیب عَ، عً ہیں

ثابت کرو کہ عَ عً = ع$_1$ ع$_3$ = ع$_2$ ع$_4$

۴۵ - **مسئلہ** - اگر مثلث ا ب ج کے راسوں ا، ب، ج میں سے گزرنے والے متراکز خط مقابل کے اضلاع سے بالترتیب نقاط د، ع، ف پر ملیں تو

$$\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = +1$$

شکل ۱ شکل ۲ شکل ۳

فرض کرو کہ ا د، ب ع، ج ف کا نقطۂ تراکز و ہے۔

اگر نقطہ و مثلث کے اندر ہو [دیکھو شکل (۱)] تو تینوں نسبتیں

$\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}}$ ، $\frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}}$ ، $\frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}}$ مثبت ہیں۔

اگر نقطہ و مثلث کے باہر ہو [دیکھو اشکال (۲) اور (۳)] تو مندرجۂ بالا نسبتوں میں سے صرف ایک مثبت ہوگی اور باقی دو منفی۔

پس ہر صورت میں مندرجۂ بالا تینوں نسبتوں کا حاصل ضرب مثبت ہوگا۔

$$\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} = \frac{\triangle\,\text{ا ب د}}{\triangle\,\text{ا د ج}} = \frac{\triangle\,\text{و ب د}}{\triangle\,\text{و د ج}} = \frac{\triangle\,\text{ا و ب}}{\triangle\,\text{ا و ج}}$$ (بموجب دفعہ ۱۳ (ب))

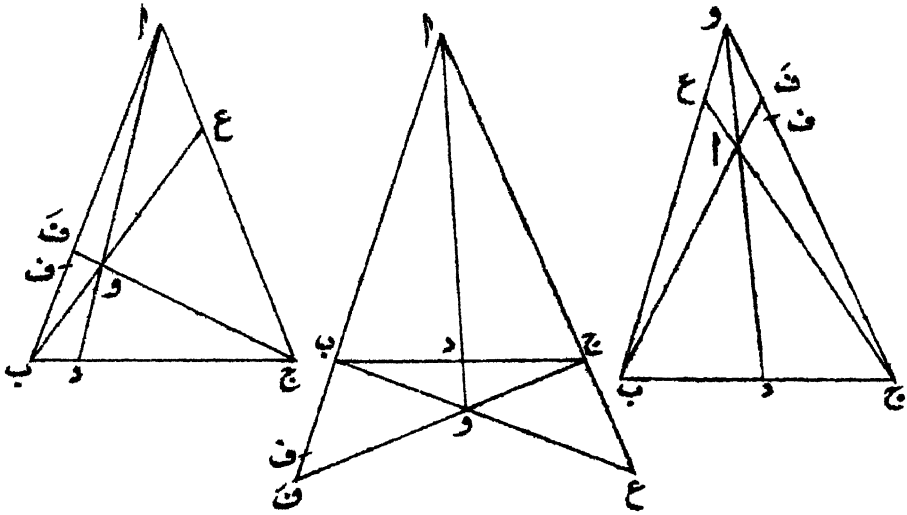
اسی طرح سے $\frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} = \frac{\triangle\,\text{ب و ج}}{\triangle\,\text{ب و ا}}$ اور $\frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = \frac{\triangle\,\text{ج و ا}}{\triangle\,\text{ج و ب}}$

اس لیے $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = \frac{\triangle\text{ا و ب}}{\triangle\text{ا و ج}} \times \frac{\triangle\text{ب و ج}}{\triangle\text{ب و ا}} \times \frac{\triangle\text{ج و ا}}{\triangle\text{ج و ب}}$

$= +1$

اس مسئلہ کا عکس:۔ اگر مثلث ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب پر بالترتیب نقاط د، ع، ف اس طرح واقع ہوں کہ

$$\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = +1$$

تو خطوط ا د، ب ع، ج ف متراکز ہونگے۔

فرض کرو کہ ا د اور ب ع کا نقطۂ تقاطع و ہے نیز فرض کرو کہ ج و ضلع ا ب سے فَ پر ملتا ہے۔

چونکہ ا د، ب ع، ج فَ متراکز خط ہیں

اس لیے $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا فَ}}{\text{فَ ب}} = +1$

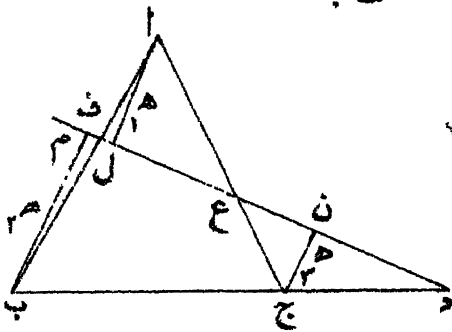
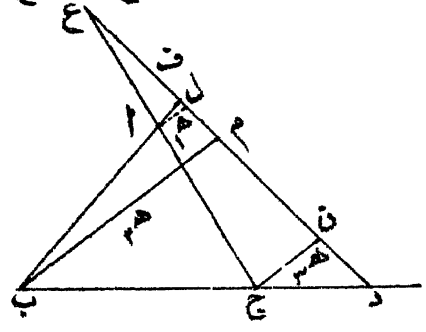
لیکن بموجب مفروض $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = +1$

اس لیے $\frac{\text{اف}}{\text{ف ب}} = \frac{\text{اف}}{\text{ف ب}}$ (بلحاظ مقدار اور علامت کے)

اس لیے نقطہ فَ نقطہ ف پر منطبق ہے۔

پس ثابت ہوا کہ خطوط اد، ب ع، ج ف متراکز ہیں۔

نوٹ۔ اس مسئلہ کو سیوا (Ceva) کا مسئلہ کہتے ہیں۔

۴۶۔ مسئلہ۔ اگر ایک خطِ مستقیم مثلث ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، اب کو بالترتیب نقاط د، ع، ف پر قطع کرے تو

$$\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{اف}}{\text{ف ب}} = -1$$

شکل ۱　　شکل ۲

قاطع مثلث کے دو ضلعوں کو داخلاً اور ایک ضلع کو خارجاً قطع کریگا [دیکھو شکل (۱)] یا تینوں ضلعوں کو خارجاً قطع کریگا [دیکھو شکل (۲)]

اس لیے تین نسبتوں $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}}$، $\frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}}$، $\frac{\text{اف}}{\text{ف ب}}$ میں سے دو مثبت اور ایک منفی ہوگی یا تینوں منفی ہونگی۔

اس لیے ہر صورت میں ان نسبتوں کا حاصل ضرب منفی ہوگا۔ اب نقاط ا، ب، ج سے قاطع پر بالترتیب عمود ال، ب م، ج ن نکالو۔ اور فرض کرو کہ ان کے طول بالترتیب $ه_1$، $ه_2$، $ه_3$ ہیں۔

تشابہ مثلثات سے بلا لحاظ علامت کے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} = \frac{\text{ھ}_2}{\text{ھ}_3} \;،\; \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} = \frac{\text{ھ}_3}{\text{ھ}_1} \;\text{ اور }\; \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = \frac{\text{ھ}_1}{\text{ھ}_2}$$

اس لیے صرف عددی قیمت کو ملحوظ رکھنے سے

$$\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = \frac{\text{ھ}_2}{\text{ھ}_3} \times \frac{\text{ھ}_3}{\text{ھ}_1} \times \frac{\text{ھ}_1}{\text{ھ}_2} = 1$$

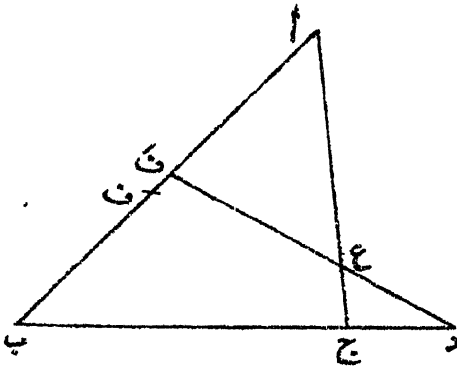
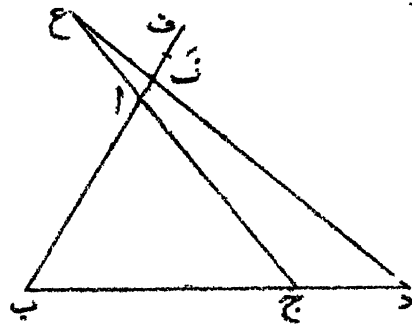
چونکہ یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اس حاصل ضرب کی علامت منفی ہے

اس لیے $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = -1$

اس مسئلہ کا عکس:۔ اگر ایک مثلث ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب پر نقاط د، ع، ف اس طرح واقع ہوں کہ

$$\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = -1$$

تو نقاط د، ع، ف ہم خط ہونگے۔

شکل ۲ شکل ۱

فرض کرو کہ د ع ضلع ا ب سے فَ پر ملتا ہے

چونکہ نقاط د، ع، فَ ہم خط ہیں

اس لیے $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا فَ}}{\text{فَ ب}} = -1$

لیکن بموجب مفروض $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} \times \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}} \times \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = -1$

اس لیے $\frac{\text{ا فَ}}{\text{فَ ب}} = \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}}$ (بلحاظ مقدار اور علامت کے)

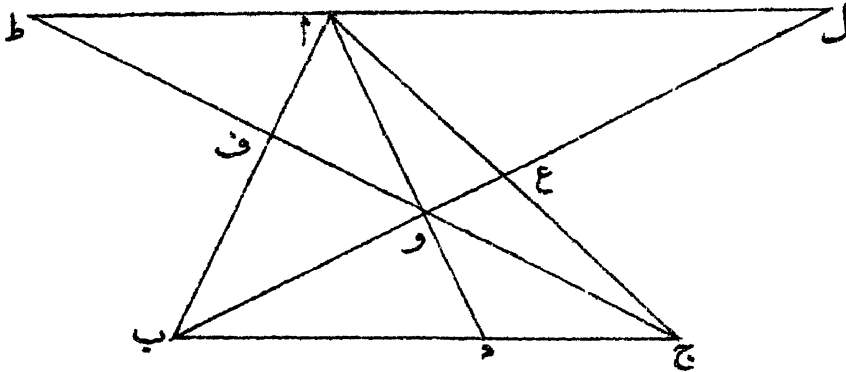
اس لیے نقطہ فَ نقطہ ف پر منطبق ہے۔

پس ثابت ہوا کہ نقاط د، ع، ف ہم خط ہیں۔

نوٹ:- اس مسئلہ کو مینی لاس (Menelaus) کا مسئلہ کہتے ہیں۔

مسئلہ ۱۲

(ا) سیوا کے مسئلہ کا تبادل ثبوت:-

مثلث ا ب ج کے راسوں سے متراکز خطوط ا و، ب وَ، ج د کھینچے گئے ہیں جو مقابل کے اضلاع سے بالترتیب نقاط د، ع، ف پر ملتے ہیں اور

ا میں سے گزرنے والے اور ب ج کے متوازی خط سے ب ع اور ج ف بالترتیب ل اور ط پر ملتے ہیں۔

متشابہ مثلثوں کی مدد سے $\frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = \frac{\text{ط ا}}{\text{ب ج}}$

اور $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} = \frac{\text{ب د}}{\text{د و}} \times \frac{\text{د و}}{\text{د ج}} = \frac{\text{ا ل}}{\text{و ا}} \times \frac{\text{و ا}}{\text{ا ط}} = \frac{\text{ا ل}}{\text{ا ط}}$

اور $\frac{ج ع}{ا ع} = \frac{ب ج}{ا ل}$

اس لیے $\frac{ا ف}{ف ب} \times \frac{ب د}{د ج} \times \frac{ج ع}{ع ا} = \frac{ط ا}{ب ج} \times \frac{ا ل}{ط ا} \times \frac{ب ج}{ا ل} = +1$

(۲) سیوا (Ceva) کے مسئلہ کی رُو سے ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

(ا) خطوطِ وسطی متراکز ہوتے ہیں۔

(ب) راسوں سے مقابل کے اضلاع پر کے عمود متراکز ہوتے ہیں۔

(ج) اضلاع کے عمودی مُنصِّف متراکز ہوتے ہیں۔

(د) زاویوں کے اندرونی مُنصِّف متراکز ہوتے ہیں۔

(ع) دو زاویوں کے خارجی منصف اور تیسرے کا داخلی مُنصِّف متراکز ہوتے ہیں۔

(۳) مثلث ا ب ج کا اندرونی دائرہ مثلث کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کو بالترتیب د، ع، ف پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ا د، ب ع، ج ف متراکز ہیں۔ اس مسئلہ کا مماثل مسئلہ جانبی دائروں کی صورت میں بھی بیان کرو اور ثابت کرو۔

(۴) ایک مثلث ا ب ج کا اندرونی دائرہ اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کو بالترتیب نقاط د، ع، ف پر مَس کرتا ہے۔ ع ف ممدودہ ب ج سے ن پر، ف د ممدودہ ا ج سے ق پر اور د ع ممدودہ ا ب سے س پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقاط ن، ق، س ہم خط ہیں۔

(۵) سوال ۴ میں ثابت کرو کہ ب ج کی موسیقی تقسیم د اور ن پر ہوتی ہے۔

(۶) ایک مثلث کے دو زاویوں کے اندرونی مُنصِّف اور تیسرے کا خارجی منصف مقابل کے اضلاع سے ہم خط نقطوں پر ملتے ہیں۔

(۷) ثابت کرو کہ مثلث کے زاویوں کے خارجی ناصف مقابل کے اضلاع سے جن تین نقطوں پر ملتے ہیں وہ نقطے ہم خط ہیں۔

(۸) مثلث ا ب ج کے راسوں ا، ب، ج پر حائط دائرہ کے مماس کھینچے گئے ہیں اور وہ مقابل کے اضلاع سے بالترتیب ل، م، ن پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ

نقاط ل، م، ن ہم خط ہیں ۔ [اشارہ ۔ $\frac{\text{ب ل}}{\text{ج ل}} = \frac{\text{ب ا}^2}{\text{ج ا}^2}$]

(۹) مثلث ا ب ج کے اندر ایک نقطہ و ہے ۔ ثابت کرو کہ زاویوں ا و ب، ب و ج، ج و ا کے خارجی منصف بالترتیب اضلاع ا ب، ب ج، ج ا سے تین ہم خط نقطوں پر ملتے ہیں ۔

(۱۰) تین متراکز خط ا د، ب ع، ج ف مثلث ا ب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، ا ب سے بالترتیب د، ع، ف پر ملتے ہیں اور ع ف، ف د، د ع بالترتیب ب ج، ج ا، ا ب سے لا، ما، ے پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ نقاط لا، ما، ے ہم خط ہیں نیز ثابت کرو کہ ب د ج لا ایک موسیقی صف ہے ۔

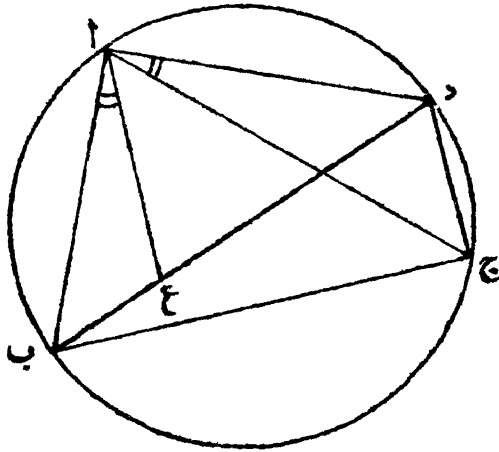
(۱۱) مثلث ا ب ج کے اندر کوئی نقطہ و ہے ۔ ثابت کرو کہ

جب و بٌ ج × جب و جٌ ا × جب و اٌ ب = جب و جٌ ب × جب و بٌ ا × جب و اٌ ج

اس نتیجہ کا عکس بیان کرو اور اُس کو بھی ثابت کرو ۔

چوتھا باب

دائروں کے خواص

۴۷۔ مسئلہ۔ ایک مشترک المحیط ذو اربعۃ الاضلاع (چار ضلعی) کے وتروں کا حاصل ضرب مقابل کے اضلاع کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

اب ج د ایک مشترک المحیط ذو اربعۃ الاضلاع ہے، ثابت کرنا ہے کہ

اج × ب د = اب × ج د + اد × ب ج

> ج اد کے مساوی > ب اع بناؤ۔

فرض کرو کہ ا ع، ب د سے ع پر ملتا ہے

مثلثات ب ا ع اور ج ا د میں

$\angle$ ب ا ع = $\angle$ ج ا د

اور $\angle$ ا ب ع = $\angle$ ا ج د

اس لیے مثلثات ب ا ع اور ج ا د متشابہ ہیں۔

اس لیے $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا ج}} = \frac{\text{ب ع}}{\text{ج د}}$

یعنی ا ب × ج د = ا ج × ب ع .... (۱)

نیز مثلثات ب ا ج اور ع ا د میں

$\angle$ ب ا ج = $\angle$ ع ا د

اور $\angle$ ب ج ا = $\angle$ ع د ا

اس لیے مثلثات ب ا ج اور ع ا د متشابہ ہیں۔

اس لیے $\frac{\text{ب ج}}{\text{ع د}} = \frac{\text{ا ج}}{\text{ا د}}$

یعنی ا د × ب ج = ا ج × ع د .... (۲)

(۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے:

ا ب × ج د + ا د × ب ج = ا ج × ب ع + ا ج × ع د

= ا ج (ب ع + ع د)

= ا ج × د ب

نوٹ ۔ اس مسئلہ کو بطلیموس (Ptolemy) کا مسئلہ کہتے ہیں۔

مسئلہ ۱۳

(۱) مثلث ا ب ج میں ا ب = ا ج، قاعدہ ب ج کے سروں ب اور ج سے خطوط ب د اور ج د کھینچے گئے ہیں جو بالترتیب ب ا اور ج ا

پر عمود ہیں۔ ثابت کرو کہ

ب ج × ا د = ۲ ا ب × ب د

(۲) مثلث مساوی الاضلاع ا ب ج کے حائط دائرہ کی قوس صغیر ب ج پر کوئی نقطہ ن ہے۔ ثابت کرو کہ

ن ب + ن ج = ن ا

(۳) مثلث ا ب ج میں ا ب = ا ج، اس مثلث کے حائط دائرہ کی قوس ب ج پر کوئی نقطہ ن لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ (ن ب + ن ج) : ن ا ایک مستقل مقدار ہے۔ نیز بتاؤ کہ ن کے کس مقام کے جواب میں ن ب + ن ج کی قیمت بڑی سے بڑی ہے۔

(۴) مربع ا ب ج د کے حائط دائرہ کی قوس صغیر ا ب پر کوئی نقطہ ن لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ

(ن ا + ن ج) : (ن ب + ن د) = ن د : ن ج

(۵) منتظم مسدس ا ب ج د ع ف کے حائط دائرہ کی قوس صغیر ا ب پر کوئی نقطہ ن لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ

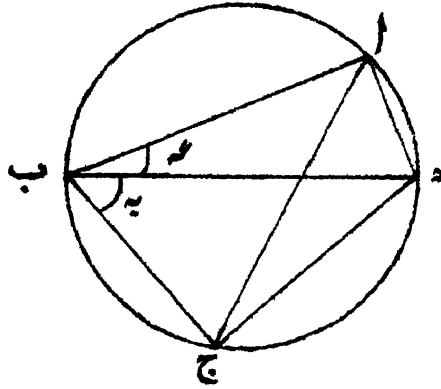
ن ا + ن ب + ن ج + ن ف = ن د + ن ع

(۶) بطلیموس کے مسئلہ کی مدد سے زاویوں عہ اور بہ کی حادّہ قیمتوں کے لیے ثابت کرو کہ

جب (عہ + بہ) = جب عہ جم بہ + جم عہ جب بہ

اکائی طول کے خط ب د کے قطر پر ایک دائرہ بناؤ۔ ب د کی مخالف سمتوں میں زاویے د ب ا اور د ب ج بالترتیب عہ اور بہ کے مساوی بناؤ (دیکھو شکل صفحہ ۷۹) ا ج کو ملاؤ۔

بطلیموس کے مسئلہ کی رُو سے ا ب × ج د + ا د × ب ج = ا ج × ب د
یعنی جم عہ جب بہ + جب عہ جم بہ = ا ج (کیونکہ ب د = ۱)

لیکن مثلث ا ب ج میں $\frac{\text{ا ج}}{\text{جب (عہ + بہ)}}$ = مثلث کے حائط دائرہ کا قطر ب د = ۱

∴　ا ج = جب (عہ + بہ)

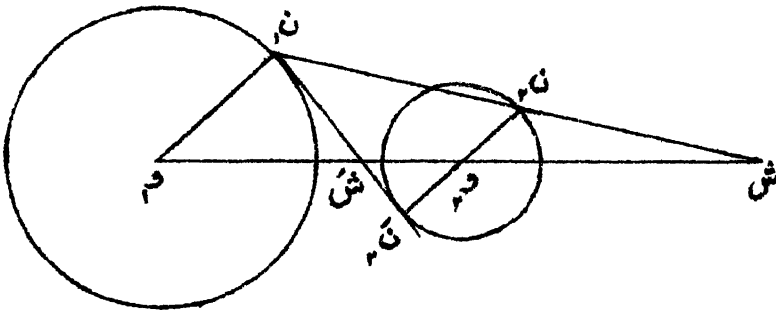
پس ثابت ہوا کہ　جب عہ جم بہ + جم عہ جب بہ = جب (عہ + بہ)

(۷) مندرجۂ بالا سوال کے طریقہ سے مناسب شکلیں کھینچ کر ثابت کرو کہ

(ا) جب (عہ − بہ) = جب عہ جم بہ − جم عہ جب بہ

(ب) جم (عہ + بہ) = جم عہ جم بہ − جب عہ جب بہ

(ج) جم (عہ − بہ) = جم عہ جم بہ + جب عہ جب بہ

۴۸ ۔ اگر دو دائروں میں کوئی دو متوازی نصف قطر (ہر دائرہ میں ایک) کھینچے جائیں تو ان کے سروں کو ملانے والا خطِ مستقیم مرکزوں کے خط کو دو ثابت نقطوں میں سے کسی ایک نہ ایک پر قطع کرتا ہے۔

فرض کرو کہ (م۱) اور (م۲) دو دیے ہوئے دائرے ہیں۔

جن کے نصف قطر بالترتیب $ر_۱$ اور $ر_۲$ ہیں - اِن میں دو نصف قطر (۱) $و_۱ن_۱$ اور $و_۲ن_۲$ ایک ہی سمت میں متوازی اور (۲) $و_۱ن_۱$ اور $و_۲ن'_۲$ مخالف سمتوں میں متوازی کھینچے گئے ہیں -

خطوط $ن_۱ن_۲$ اور $ن_۱ن'_۲$ مرکزوں کے خط $و_۱و_۲$ کو بالترتیب نقاط ش اور ش' پر قطع کرتے ہیں - ثابت کرنا ہے کہ ش اور ش' دو ثابت نقطے ہیں -

حصۂ اول - چونکہ $و_۱ن_۱ \parallel و_۲ن_۲$

اس لیے مثلثات ش $و_۱ن_۱$ اور ش $و_۲ن_۲$ متشابہ ہیں -

اس لیے $\frac{ش و_۱}{ش و_۲} = \frac{و_۱ن_۱}{و_۲ن_۲} = \frac{ر_۱}{ر_۲}$ جو ایک مستقل مقدار ہے -

یعنی مرکزوں کے خط $و_۱و_۲$ کی خارجی تقسیم $ر_۱ : ر_۲$ کی نسبت میں نقطہ ش پر ہوتی ہے اس لیے ش ایک ثابت نقطہ ہے -

حصۂ دوم - چونکہ $و_۱ن_۱ \parallel و_۲ن'_۲$

اس لیے مثلثات ش' $و_۱ن_۱$ اور ش' $و_۲ن'_۲$ متشابہ ہیں -

اس لیے $\frac{ش' و_۱}{ش' و_۲} = \frac{و_۱ن_۱}{و_۲ن'_۲} = \frac{ر_۱}{ر_۲}$ جو ایک مستقل مقدار ہے -

یعنی مرکزوں کے خط $و_۱و_۲$ کی داخلی تقسیم $ر_۱ : ر_۲$ کی نسبت میں نقطہ ش' پر ہوتی ہے - اس لیے ش' ایک ثابت نقطہ ہے -

پس مسئلہ ثابت ہوا -

تعریف - نقاط ش' اور ش جن پر مرکزوں کے خط $و_۱و_۲$ کی داخلی اور خارجی تقسیم نصف قطروں $ر_۱$ اور $ر_۲$ کی نسبت میں ہوتی ہے "دیے ہوئے دائروں کے مشابہت کے مرکز کہلاتے ہیں - ش سیدھی مشابہت کا مرکز ہے اور ش' آڑی مشابہت کا مرکز -

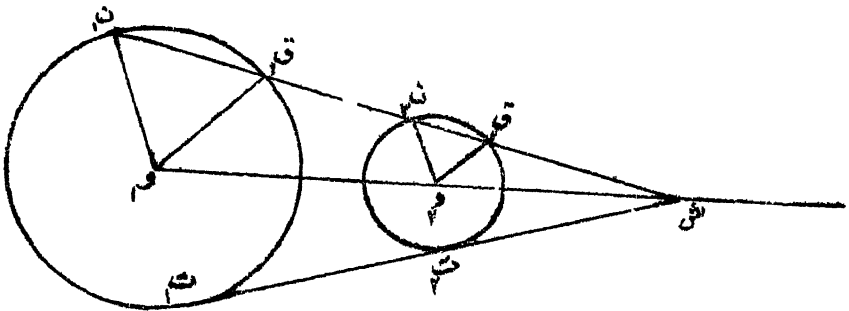
امثلہ ۱۴

(۱) دائروں ($و_۱$) اور ($و_۲$) کے نصف قطر ۱ء۲" اور ۵ء۶" ہیں اور

و۱ و۲ = ۴" اِن دائروں کے مشابہت کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ محسوب کرو۔
[جواب - ۳"]

(۲) ثابت کرو کہ دائروں (و۱) اور (و۲) کے راست مشترک مماسات کا نقطۂ تقاطع سیدھی مشابہت کے مرکز ش پر اور متقاطع مشترک مماسات کا نقطۂ تقاطع آڑی مشابہت کے مرکز ش۲ پر ہے۔

(۳) ایک متغیر دائرہ (ج) دو دیے ہوئے دائروں (و۱) اور (و۲) کو نقاط ف اور ق پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ خطِ مستقیم ف ق دیے ہوئے دائروں کے ایک نہ ایک مشابہت کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔ مختلف صورتوں میں امتیاز کرو۔

(۴) دو دیے ہوئے دائروں (و۱) اور (و۲) کی سیدھی مشابہت کے مرکز ش میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو دائرہ (و۱) کو نقاط ن۱ اور ق۱ پر اور دائرہ (و۲) کو نقاط ن۲ اور ق۲ پر قطع کرتا ہے (دیکھو شکل)

ثابت کرو کہ و۱ ن۱ متوازی ہے و۲ ن۲ اور و۱ ق۱ متوازی ہے و۲ ق۲ کے۔

(۵) شکل بالا میں ثابت کرو کہ

ش ن۱ × ش ق۲ = ش ن۲ × ش ق۱ = ش ت۱ × ش ت۲

جہاں ت۱ اور ت۲ دیے ہوئے دائروں کے ایک راست مشترک مماس کے نقاطِ تماس ہیں۔

(۶) ثابت کرو کہ ایک مثلث کے حائط اور نونقطی دائروں کے مشابہت کے

مرکز مثلث کے عمودی مرکز اور ہندسی مرکز ہیں ۔

(۷) ثابت کرو کہ دو مساوی دائروں کی سیدھی مشابہت کا مرکز لاتناہی پر ہے ۔

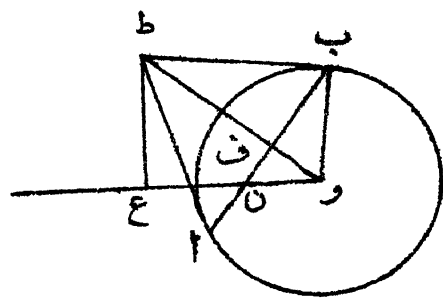
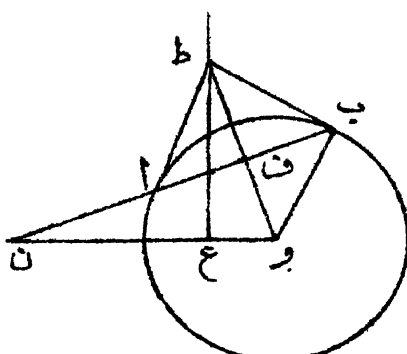
(۸) (و$_1$)، (و$_2$) اور (و$_3$) تین دیے ہوئے دائرے ہیں جن کے مرکز ہم خط نہیں ہیں ۔ دائروں (و$_2$) اور (و$_3$) کی سیدھی اور آڑی مشابہت کے مرکز بالترتیب ش$_1$ اور ش$'_1$ ہیں ۔ اور دائروں (و$_3$) اور (و$_1$) کی سیدھی اور آڑی مشابہت کے مرکز بالترتیب ش$_2$ اور ش$'_2$ ہیں اور دائروں (و$_1$) اور (و$_2$) کی سیدھی اور آڑی مشابہت کے مرکز بالترتیب ش$_3$ اور ش$'_3$ ہیں ۔ ثابت کرو کہ

(۱) و$_1$ش$'_1$، و$_2$ش$'_2$ اور و$_3$ش$'_3$ متراکز ہیں

(۲) چھ نقطوں ش$_3$ش$'_1$، ش$_2$ش$'_2$، ش$_1$ش$'_3$ میں سے ایسے تین تین نقطوں کے چار جُٹ ہیں جو ہم خط ہیں ۔

۴۹ ۔ ایک دائرے کے اُن وتروں کے سِروں پر کے مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق جو ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں ایک خطِ مستقیم ہے ۔

شکل ۱

شکل ۲

فرض کرو کہ دائرہ (و) کی سطح میں ایک ثابت نقطہ ن ہے ۔ ن میں سے گزرنے والا کوئی خط دائرہ (و) سے نقاط ا اور ب پر ملتا ہے اور ا اور ب پر

مماسات کا نقطۂ تقاطع ط ہے۔ ثابت کرنا ہے کہ ط کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے۔
و ن کو ملاؤ اور ط سے و ن پر عمود ط ع نکالو
فرض کرو کہ و ط اور اب کا نقطۂ تقاطع ف ہے،
و ب کو ملاؤ۔
چونکہ ف اور ع پر کے زاویے قائمے ہیں
اس لیے نقاط ف، ع، ن، ط مشترک المحیط ہیں۔
اس لیے و ن × و ع = و ط × و ف = و ب^2 جو ایک مستقل مقدار ہے۔
اب چونکہ و اور ن ثابت نقطے ہیں اس لیے ع بھی ایک ثابت نقطہ ہے
اور نقطہ ن میں سے گزرنے والے کسی وتر اب کے سروں پر کے مماسوں کا نقطۂ تقاطع ط ایک ثابت خطِ مستقیم پر واقع ہے جو ثابت نقطہ ع میں سے گزرتا ہے اور و ن پر عمود وار ہے۔ پس مسئلہ ثابت ہوا۔

نوٹ:۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ع ط پر کے کسی نقطہ سے دائرہ (و) تک کھنچے ہوئے مماسوں کا وترِ تماس نقطہ ن میں سے گزرتا ہے۔ پس خط ع ط طریق کے دونوں شرائط کو پورا کرتا ہے۔

۵۰۔ تعریفات۔ دفعہ گذشتہ کی ترقیم کے مطابق نقطۂ ط کا طریق دیے ہوئے دائرہ (و) کے لحاظ سے نقطہ ن کا قطبی کہلاتا ہے اور نقطۂ ن دیے ہوئے دائرہ (و) کے لحاظ سے خط ع ط کا قطب کہلاتا ہے۔

اگر دائرہ کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی خط پر مرکز کی ایک ہی جانب نقاط ن اور ن، اس طرح لیے جائیں کہ و ن × و ن، = ر^2 جہاں ر دائرہ (و) کا نصف قطر ہے تو نقاط ن، ن، میں سے ہر ایک بلحاظ دائرہ (و) کے دوسرے نقطہ کا مقلوب کہلاتا ہے۔ مثلاً دفعہ گزشتہ کی شکل میں نقاط ن اور ع بلحاظ دائرہ (و) کے ایک دوسرے کے مقلوب ہیں پس حاصل ہوا کہ بلحاظ دائرہ (و) کے نقطہ ن کا قطبی ایک خطِ مستقیم ہے جو ن کے مقلوب میں سے گزرتا ہے اور و ن پر عمود وار ہے۔

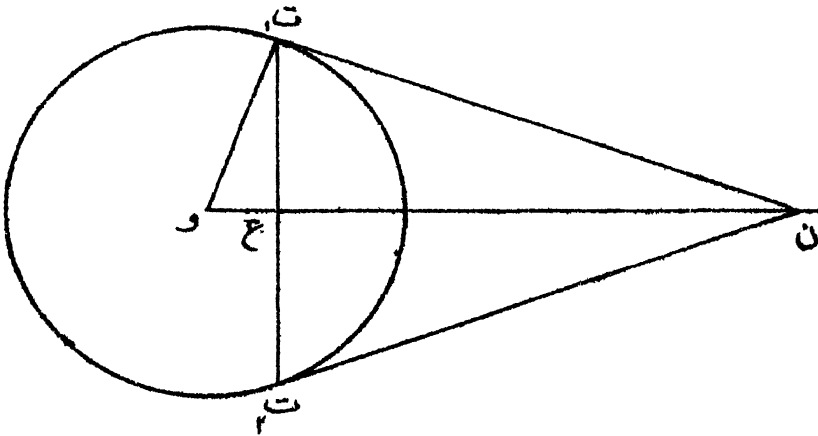
۵۱۔ چونکہ و ن × و ن، = ر^2 جہاں ر دائرہ (و) کا نصف قطر ہے،

اس لیے و ع بڑا ہے، مساوی ہے، چھوٹا ہے و ن سے بموجب اس کے کہ

و ن چھوٹا ہے یا مساوی ہے یا بڑا ہے نصف قطر ر سے

پس حاصل ہوا کہ بلحاظ دائرہ (و) کے نقطہ ن کا قطبی دائرہ (و) کو قطع نہیں کرتا ہے، یا مس کرتا ہے، یا قطع کرتا ہے بموجب اس کے کہ نقطہ ن دائرہ کے اندر ہے، دائرہ پر ہے، یا دائرہ کے باہر ہے۔

۵۲- مسئلہ- اگر نقطہ ن دائرہ (و) کے باہر ہو تو ن کا قطبی اُن مماسات کا وترِ تماس ہے جو ن سے دائرہ (و) تک کھینچے جائیں۔

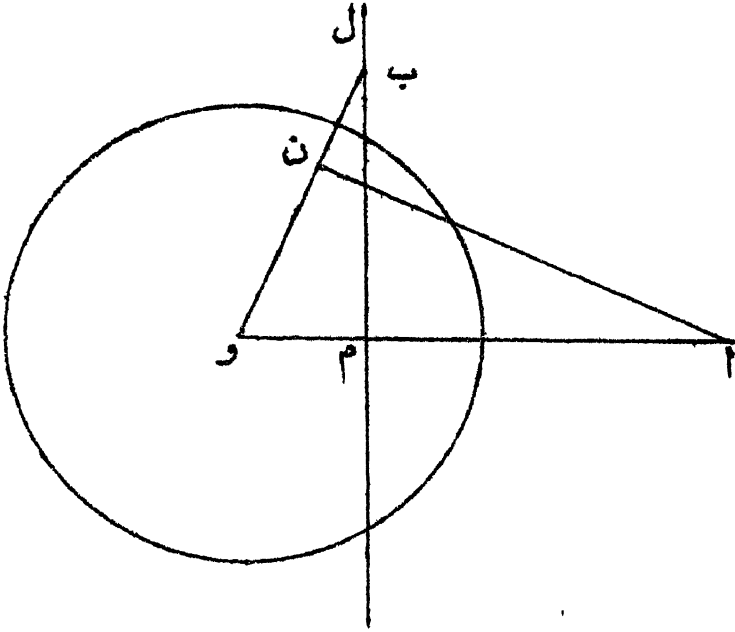
نقطہ ن سے دائرہ (و) کے مماسات ن ت۱، ن ت۲ کھینچو۔

فرض کرو کہ وترِ تماس ت۱ ت۲ خط و ن سے ع پر ملتا ہے۔

چونکہ مثلث و ن ت۱ قائم الزاویہ ہے اور ت۱ ع عمود ہے وتر و ن پر

اس لیے $و ن \times و ع = و ت_1^2$

اس لیے بلحاظ دائرہ (و) کے نقاط ن اور ع ایک دوسرے کے مقلوب ہیں۔

نیز وترِ تماس ت۱ ت۲ نقطۂ ن کے مقلوب ع میں سے گزرتا ہے

اور و ن پر عمود وار ہے۔
اس لیے بلحاظ دائرہ (و) کے نقطۂ ن کا قطبی وترِ تماس ت ت ہے۔
۵۳ - مسئلہ - اگر بلحاظ دائرہ (و) کے نقطہ ا کا قطبی نقطہ ب میں سے گزرے تو ب کا قطبی ا میں سے گزریگا۔

فرض کرو کہ دائرہ (و) کے لحاظ سے ا کا قطبی خط ل م ہے
حسبِ مفروض خط ل م نقطہ ب میں سے گزرتا ہے
فرض کرو کہ و ا اور ل م کا نقطۂ تقاطع م ہے
و ب کو ملاؤ اور ا سے و ب پر عمود ا ن نکالو۔
چونکہ م اور ن پر کے زاویے قائمے ہیں
اس لیے و ن × و ب = و م × و ا = ر۲ جہاں ر دائرہ (و) کا نصف قطر ہے۔
اس لیے بلحاظ دائرہ (و) کے ب کا مقلوب ن ہے
نیز ن ا عمود ہے و ب پر

اس لیے ب کا قطبی ن ا ہے اور یہ خط نقطۂ ا میں سے گزرتا ہے
پس مسئلہ ثابت ہوا۔

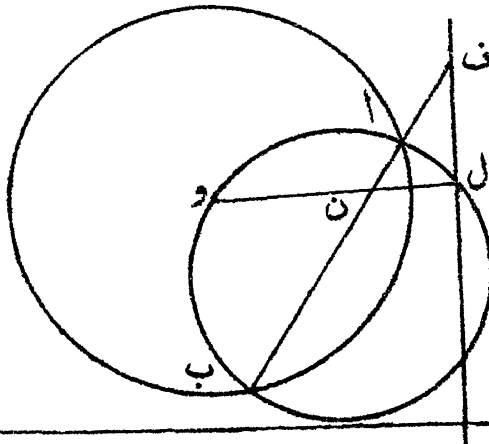
نوٹ:۔ اس مسئلہ کو قطب اور قطبی کی متکافی خاصیت سے موسوم کرتے ہیں۔
مندرجۂ بالا مسئلہ سے ظاہر ہے کہ اگر ایک دائرہ کے لحاظ سے دو خطوط میں سے ایک کا قطب دوسرے پر ہو تو دوسرے کا قطب پہلے پر ہوگا۔

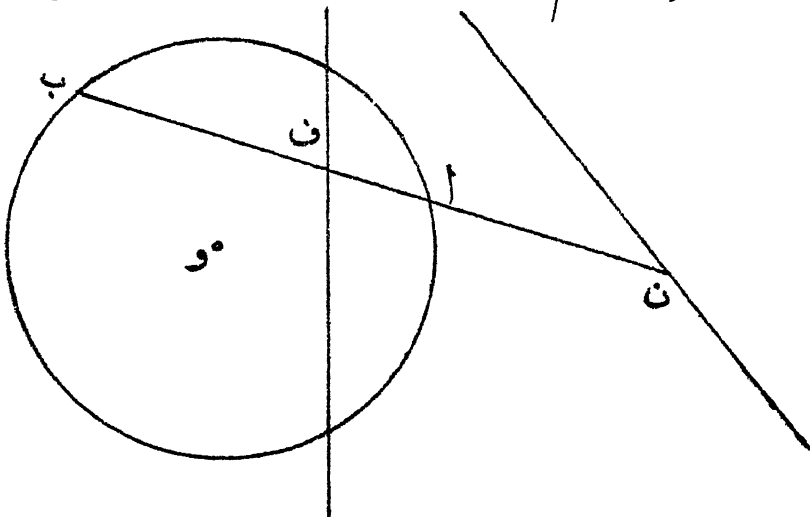
۵۴۔ تعریفات۔

(۱) ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے دو دیے ہوئے نقطے مزدوج نقطے کہلاتے ہیں۔ اگر ان نقطوں میں سے کسی کا ایک قطبی دوسرے نقطہ میں سے گزرے۔

(۲) ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے دو دیے ہوئے خطوط مزدوج خطوط کہلاتے ہیں اگر ان میں سے کسی ایک خط کا قطب دوسرے خط پر واقع ہو۔

(۳) اگر ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے ایک مثلث کے ہر راس کا قطبی مقابل کا ضلع ہو تو مثلث مذکور دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے مثلث مزدوج بالذات کہلاتا ہے۔

*۵۵۔ مسئلہ۔ اگر ایک ثابت نقطہ ن میں سے کوئی خط کھینچا جائے جو ایک دیے ہوئے دائرہ (و) سے نقاط ا اور ب پر اور نقطۂ ن کے قطبی سے ف پر ملے تو ا ب کی موسیقی تقسیم ن اور ف پر ہوتی ہے۔

صورت اول - فرض کرو کہ ثابت نقطہ ن دائرہ کے اندر ہے۔
فرض کرو کہ دن، ن کے قطبی سے ل پر ملتا ہے۔
تب ون × ن ل = ون (ول - ون) = ون × ول - ون^2
= و ا^2 - ون^2 (کیونکہ ون × ول = و ا^2)
نیز ب ن × ن ا = و ا^2 - ون^2
اس لیے ون × ن ل = ب ن × ن ا
یعنی نقاط و، ب، ل، ا مشترک المحیط ہیں
نقاط و، ب، ل، ا میں سے گزرنے والا دائرہ کھینچو۔
اس دائرہ کا وتر و ب = وتر و ا، کیونکہ ہر ایک وتر دائرہ (و) کے نصف قطر کے مساوی ہے۔ اس لیے و ا اور و ب کے محاذی ل پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔
یعنی ل ن اندرونی منصّف ہے ∠ ب ل ا کا
نیز چونکہ ∠ ن ل ف قائمہ ہے
اس لیے ل ف خارجی ناصف ہے ∠ ب ل ا کا
اس لیے ا ب کی موسیقی تقسیم ن اور ف پر ہوتی ہے۔
صورت دوم - فرض کرو کہ ثابت نقطہ ن دائرہ کے باہر ہے۔

ب
ف
ا
و
ن

چونکہ ن کا قطبی ف میں سے گزرتا ہے اس لیے ف کا قطبی ن میں سے گزریگا ۔ اس لیے صورت اول کی رُو سے اب کی موسیقی تقسیم ن اور ف پر ہوتی ہے ۔

پس مسئلہ ثابت ہوا ۔

نوٹ :۔ اس مسئلہ کو " قطب اور قطبی کی موسیقی خاصیت " سے تعبیر کرتے ہیں

اس دفعہ کے مسئلہ کا عکس حسبِ ذیل ہے :

اگر ایک ثابت نقطہ ن میں سے کوئی خط کھینچا جائے جو ایک دیے ہوئے دائرہ (و) سے نقاط ا اور ب پر ملے اور اب پر ایک نقطہ ف ایسا لیا جائے کہ اب کی موسیقی تقسیم ن اور ف پر ہوتی ہو تو ف کا طریق ن کا قطبی ہوگا ۔

اس کا ثبوت طالب علم مشق کے طور پر خود بہم پہنچائے ۔

امثلہ ۱۵

(۱) ثابت کرو کہ دو نقطوں کو ملانے والا خط ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے اُن نقطوں کے قطبیوں کے نقطۂ تقاطع کا قطبی ہے ۔

(۲) ثابت کرو کہ دو خطوطِ مستقیم کا نقطۂ تقاطع ایک دائرہ کے لحاظ سے اُن خطوط کے قطبوں کو ملانے والے خط کا قطب ہے ۔

(۳) ثابت کرو کہ ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے متراکز خطوط کے قطب ہم خط ہیں ۔

(۴) ثابت کرو کہ ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے ہم خط نقطوں کے قطبی متراکز ہیں ۔

(۵) بلحاظ دائرہ (و) کے نقاط ا اور ب کے قطبی لیے گئے ہیں ۔ ثابت کرو کہ $\angle$ ا و ب مساوی ہے اُس زاویہ کے جو ا اور ب کے قطبیوں سے بنتا ہے ۔

(۶) دو ہم مرکز دائروں میں سے کسی ایک کے مماسوں کے قطبوں کا طریق بلحاظ دوسرے دائرہ کے معلوم کرو ۔

(۷) ثابت کرو کہ ایک دائرہ کے مساوی وتروں کے قطبوں کا طریق دائرۂ مذکورہ کے

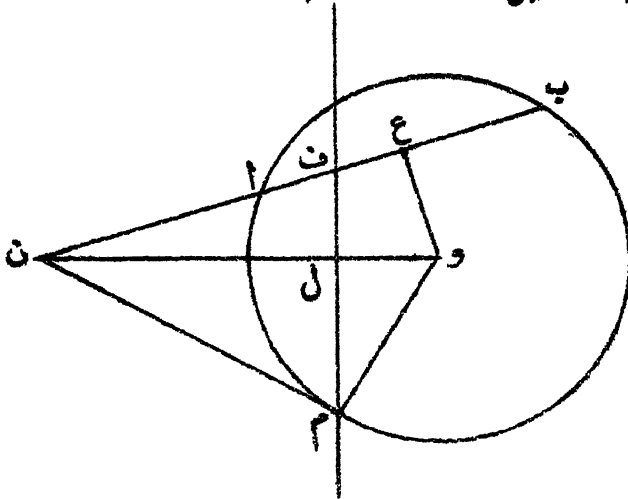
لحاظ سے ایک ہم مرکز دائرہ ہے۔

(۸) دائرہ (و) کے لحاظ سے ا اور ب مزدوج نقطے ہیں اور خط ا ب کا قطب ج ہے ثابت کرو کہ دائرہ (و) کے لحاظ سے مثلث ا ب ج مزدوج بالذات ہے۔

(۹) اگر ایک مثلث بلحاظ ایک دائرہ کے مزدوج بالذات ہو تو ثابت کرو کہ مثلث کا عمودی مرکز دائرہ کے مرکز پر ہوگا۔

(۱۰) اگر دائرہ (و) کے لحاظ سے نقاط ا اور ب کے قطبی لیے جائیں اور ا سے ب کے قطبی پر عمود ا ل اور ب سے ا کے قطبی پر عمود ب م نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ و ا : و ب = ا ل : ب م

[اسے سامن (Salmon) کا مسئلہ کہتے ہیں]

(۱۱) اگر ایک دیے ہوئے بیرونی نقطہ ن میں سے کوئی خط کھینچا جائے جو دائرہ (و) سے ا اور ب پر اور ن کے قطبی سے ف پر ملے تو ثابت کرو کہ ن ا اور ن ب کا موسیقی اوسط ن ف ہے۔

فرض کرو کہ دائرہ (و) کے لحاظ سے ن کا قطبی خط و ن سے ل پر اور دائرہ (و) سے م پر ملتا ہے۔

ن م اور و م کو ملاؤ اور و سے ا ب پر عمود و ع نکالو۔

چونکہ ن م دائرہ (و) کا مماس ہے،

اس لیے ن ا × ن ب = ن م² = ن ل × ن و، (کیونکہ ∠ ن ل م قائمہ ہے)
= ن ف × ن ع، (کیونکہ نقاط و، ع، ف، ل مشترک المحیط ہیں)

اس لیے ۲ ن ا × ن ب = ن ف × ۲ ن ع
= ن ف (ن ا + ن ب)، (کیونکہ ا ب کا وسطی نقطہ ع ہے)

اس لیے ن ف = ۲ ن ا × ن ب / (ن ا + ن ب)

یعنی ن ف موسیقی اوسط ہے ن ا اور ن ب کا۔

٥٦ - تقلیب - دفعہ ٥٠ کی تعریف کی مدد سے ہم ایک دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے جس کا نصف قطر ر ہو ایک دیے ہوئے نقطہ ن کا مقلوب نقطہ ن معلوم کرسکتے ہیں۔ دائرہ کے مرکز و کو تقلیب کا مرکز اور نصف قطر ر کو تقلیب کا نصف قطر کہتے ہیں۔

نیز بعض اوقات ر² کو تقلیب کا مستقل کہتے ہیں۔ اور دائرہ کو تقلیب کا دائرہ کہتے ہیں۔

اگر ن کوئی طریق مرتسم کرے تو ن کے مقلوب ن، کے طریق کو ن کے طریق کا مقلوب کہتے ہیں۔

مندرجۂ بالا تعریفات سے ظاہر ہے کہ تقلیب کے مرکز میں سے گزرنے والا ہر خط اپنا آپ مقلوب ہے۔

٥٧ - مسئلہ - ایک ایسے خطِ مستقیم کا مقلوب جو تقلیب کے مرکز میں سے نہ گزرے تقلیب کے مرکز میں سے گزرنے والا ایک دائرہ ہوگا۔

فرض کرو کہ دیا ہوا خطِ مستقیم ا ب ہے اور تقلیب کا مرکز و اور تقلیب کا نصف قطر ر ہے۔

و سے ا ب پر عمود و ع نکالو اور ع کا مقلوب ع، معلوم کرو۔
نیز ا ب پر کے کسی نقطہ ن کا مقلوب ن، معلوم کرو۔

بموجب تعریف وع × وع۱ = ر۲

اور و ن × ون۱ = ر۲

∴ وع × وع۱ = ون × ون۱

∴ نقاط ق، ع، ع۱، ن۱ مشترک المحیط ہیں۔

∴ ∠ ون۱ع۱ = ∠ وع ن = قائمہ

اس لیے وع۱ کے محاذی ن۱ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے

اس لیے ن۱ کا طریق یعنی خطِ مستقیم اب کا مقلوب وع۱ قطر پر کا دائرہ ہے۔

نوٹ۔ مسئلۂ بالا کی شکل میں نقاط ن اور ن۱ ایک دوسرے کے مقلوب ہیں اس لیے حاصل ہوتا ہے کہ ایسے دائرہ کا مقلوب جو تقلیب کے مرکز میں سے گزرتا ہے ایک خطِ مستقیم ہے جو دیے ہوئے دائرہ کے اُس قطر پر جو تقلیب کے مرکز میں سے گزرتا ہے عمود وار ہے اور تقلیب کے مرکز میں سے نہیں گزرتا ہے

۵۸ - ایک ایسے دائرہ کا مقلوب جو تقلیب کے مرکز میں سے نہیں گزرتا ہے ایک دائرہ ہے جو تقلیب کے مرکز میں سے نہیں گزرتا ہے۔

فرض کرو کہ تقلیب کا مرکز و اور تقلیب کا مستقل ر۲ ہے۔ نیز فرض کرو کہ دیے ہوئے دائرہ (ج) پر کے کسی نقطہ کا مقلوب ن۱ ہے۔

تقلیب کے مرکز و سے دائرہ (ج) کا ایک مماس و ت کھینچو فرض کرو کہ
طول و ت = م

نیز فرض کرو کہ خط و ن دائرہ (ج) سے مکرر نقطہ ق پر ملتا ہے۔
ق ج کو ملاؤ اور ن$_1$ م متوازی ق ج کے کھینچو جو و ج سے م پر ملے۔

چونکہ و ن × و ن$_1$ = ر^2

اور و ن × و ق = م^2

اس لیے $\frac{\text{و ن}_1}{\text{و ق}} = \frac{\text{ر}^2}{\text{م}^2}$ جو ایک مستقل مقدار ہے

نیز متشابہ مثلثات و م ن$_1$ اور و ج ق سے

$\frac{\text{و م}}{\text{و ج}} = \frac{\text{م ن}_1}{\text{ج ق}} = \frac{\text{و ن}_1}{\text{و ق}}$ جو ایک مستقل مقدار ہے

اس لیے م ایک ثابت نقطہ ہے اور م ن$_1$ کا طول مستقل ہے۔
پس ثابت ہوا کہ ن$_1$ کا طریق یعنی دیے ہوئے دائرہ (ج) کا مقلوب بلحاظ مرکز و کے ایک دائرہ ہے جس کا مرکز م ہے۔

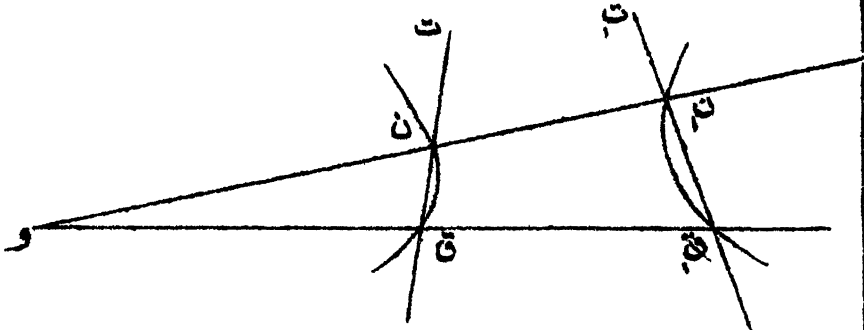
*۵۹۔ تعریفات۔

(۱) اگر ایک منحنی پر دو نقطے ن اور ق ہوں تو وتر ن ق کا

انتہائی مقام جب کہ نقطۂ ق منحنی پر حرکت کرکے نقطہ ن کے بے انتہا قریب آجاتا ہے منحنی کے نقطہ ن پر کا مماس کہلاتا ہے۔

اس تعریف سے ظاہر ہے کہ خطِ مستقیم کے کسی نقطہ پر کا مماس خود وہی خطِ مستقیم ہے۔

(۲) دو متقاطع منحنیوں کے نقطۂ تقاطع پر کے مماسوں کا درمیانی زاویہ منحنیوں کا زاویۂ تقاطع کہلاتا ہے۔

*۶۰۔ تقلیب کے مرکز میں سے گزرنے والا کوئی خطِ مستقیم ایک منحنی اور اس کے مقلوب کو مکمل زاویوں پر قطع کرتا ہے۔

فرض کرو کہ تقلیب کا مرکز و اور نصف قطر ر ہے۔

منحنی پر دو نقطے ن اور ق ایک دوسرے کے قریب ہیں اور ان کے مقلوب ن، اور ق، ہیں جو لازماً ایک دوسرے کے قریب واقع ہونگے۔

ق ن کو ت تک اور ق، ن، کو ت، تک خارج کرو۔

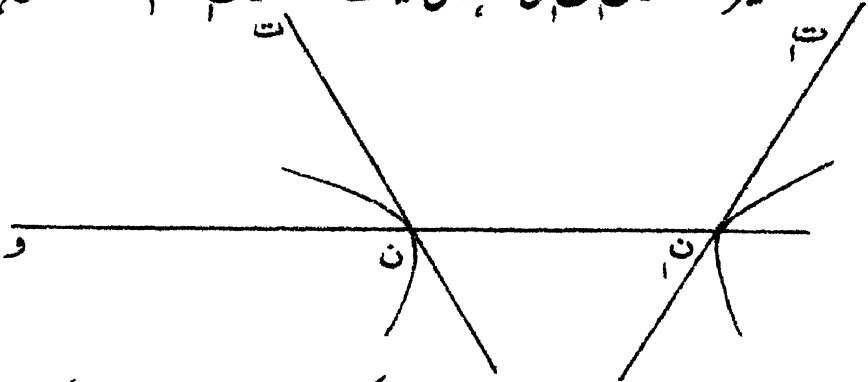
و ن × و ن، = و ق × و ق، کیونکہ ہر ایک مقدار تقلیب کے مستقل ر² کے مساوی ہے۔

اس لیے ن، ن، ق، ق مشترک المحیط ہیں۔

اس لیے زاویے و ن ت اور و ق، ن، تکمل زاویے ہیں۔

اب جوں جوں نقطہ ق نقطہ ن کے قریب آتا ہے، ویسے ہی نقطہ ق، بھی ن، کے قریب آئیگا اور انتہا میں خطوط ق ن ت اور ق، ن، ت، بالترتیب

نقاط ن اور ن۱ پر منحنیوں کے مماسات ن ت اور ن۱ ت۱ بن جائینگے۔

نیز < د ق ن۱ کی انتہائی قیمت < د ن۱ ت۱ کے مساوی ہوگی۔

اس لیے د ن ت اور د ن۱ ت۱ مکمل زاویے ہیں۔یہی ثابت کرنا تھا۔

نوٹ :- مندرجہ بالا نتیجہ کی مدد سے بہ آسانی ثابت ہوسکتا ہے کہ دو متقاطع منحنیوں کا زاویۂ تقاطع ان کے مقلوبوں کے زاویۂ تقاطع کے مساوی ہوتا ہے۔ نیز اگر دو منحنی ایک دوسرے کو کسی نقطۂ ق پر مس کریں تو ان کے مقلوب بھی ایک دوسرے کو ق کے مقلوب نقطہ ق۱ پر مس کرینگے۔

۱۶- تعریف — اگر دو دائروں کا زاویۂ تقاطع زاویۂ قائمہ ہو تو یہ دائرے علی القوائم دائرے کہلاتے ہیں۔یا یوں کہا جاتا ہے کہ یہ دائرے ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں۔

اس تعریف سے ظاہر ہے کہ اگر دو دائرے ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کریں تو کسی ایک نقطۂ تقاطع پر ہر دائرہ کا مماس دوسرے دائرہ کے مرکز میں سے گزریگا۔

مندرجۂ بالا نتیجہ کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے "دو علی القوائم دائروں کے کسی ایک نقطۂ تقاطع تک کھنچے ہوئے نصف قطر ایک دوسرے پر علی القوائم ہوتے ہیں - اور دائروں کے مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کا مربع اُن کے نصف قطروں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

امثلہ ۱۶

(۱) اگر تقلیب کے مرکز و میں سے گزرنے والے ایک خطِ مستقیم پر کے تین نقطوں ن، ق، ط کے مقلوب ن، ق، ط ہوں تو ثابت کرو کہ (ا) اگر و ن، و ق، و ط سلسلۂ حسابیہ میں ہوں تو و ن، و ق، و ط سلسلۂ موسیقیہ میں ہونگے۔
(ب) و ن، و ق، و ط سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں تو و ن، و ق، و ط سلسلۂ ہندسیہ میں ہونگے۔

(۲) ایک خطِ مستقیم ایک دائرہ کو قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ تقلیب کے مرکز اور نصف قطر کے مناسب انتخاب سے دیا ہوا خط دیے ہوئے دائرہ میں منقلب کیا جا سکتا ہے۔

(۳) اگر ایک دیے ہوئے دائرہ کے باہر کے کسی نقطہ پر تقلیب کا مرکز لیا جائے تو ثابت کرو کہ تقلیب کے نصف قطر کے مناسب انتخاب سے دیا ہوا دائرہ اپنے آپ میں منقلب ہو سکتا ہے۔

(۴) اگر تقلیب کے مرکز و اور نصف قطر ر کے لحاظ سے نقاط ن اور ق کے مقلوب ن اور ق ہوں تو ثابت کرو کہ $ن_1 ق_1 = \frac{ر^2}{و ن \times و ق} \times ن ق$۔

(۵) اگر تقلیب کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی خط پر کے دو نقطوں ن اور ق کے مقلوب ن اور ق ہوں اور تقلیب کے دائرہ پر کوئی نقطہ لا ہو تو ثابت کرو کہ $\angle$ ن لا ق = $\angle$ ن لا ق۔

(۶) اُن دائروں کے مرکزوں کا طریق معلوم کرو جو ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر علی القوائم قطع کریں۔

(۷) ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر علی القوائم قطع کرے۔

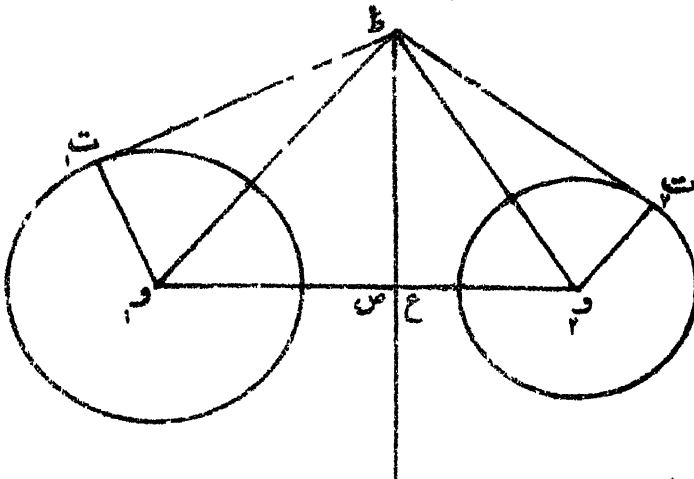
(۸) ایک دیے ہوئے نصف قطر والا ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر علی القوائم قطع کرے۔

(۹) ثابت کرو کہ دو علی القوائم دائروں میں سے ایک کے کسی قطر کی موسیقی تقسیم

دوسرے کے محیط پر ہوتی ہے۔ (دیکھو دفعہ ۹۲)۔

(۱۰) بلحاظ دائرہ (و) کے نقطہ ن کا مقلوب ن، ہے ثابت کرو کہ نقاط ن اور ن، میں سے گزرنے والا ہر دائرہ، دائرہ (و) کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

(۱۱) بلحاظ دائرہ (و) کے نقاط ن اور ق مزدوج نقطے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا قطر ن ق ہے، دائرہ (و) کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

۶۲ - مسئلہ - اُس نقطہ کا طریق جس سے دو دیے ہوئے دائروں تک کھنچے ہوئے مماس مساوی ہوں ایک خطِ مستقیم ہے جو دائروں کے مرکزوں کو ملانے والے خط پر عمود وار ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ($و_۱$) اور ($و_۲$) دو دیے ہوئے دائرے ہیں جن کے نصف قطر بالترتیب $ر_۱$ اور $ر_۲$ ہیں۔ نیز فرض کرو کہ نقطہ ط سے ان دائروں تک کھنچے ہوئے مماسات ط $ت_۱$ اور ط $ت_۲$ مساوی ہیں۔

$و_۱$ ط، $و_۱ ت_۱$، $و_۲$ ط، اور $و_۲ ت_۲$ کو ملاؤ اور ط سے $و_۱ و_۲$ پر عمود ط ع نکالو۔

چونکہ حسب مفروض ط $ت_۱$ = ط $ت_۲$

∴ ط $ت_۱^۲$ = ط $ت_۲^۲$

∴ ط $و_۱^۲$ - $و_۱ ت_۱^۲$ = ط $و_۲^۲$ - $و_۲ ت_۲^۲$

$$\therefore\ \text{ع ط}^2 + \text{و}_1\text{ع}^2 - \text{و}_1\text{ت}_1^2 = \text{ع ط}^2 + \text{و}_2\text{ع}^2 - \text{و}_2\text{ت}_2^2$$

$$\therefore\ \text{و}_1\text{ع}^2 - \text{و}_2\text{ع}^2 = \text{و}_1\text{ت}_1^2 - \text{و}_2\text{ت}_2^2$$

$= \text{ر}_1^2 - \text{ر}_2^2$ جو ایک مستقل مقدار ہے۔

لیکن $\text{و}_1\text{ع}^2 - \text{و}_2\text{ع}^2 = (\text{و}_1\text{ع} + \text{و}_2\text{ع})(\text{و}_1\text{ع} - \text{و}_2\text{ع})$

$= \text{و}_1\text{و}_2\,(2\,\text{ص ع})$، جہاں $\text{و}_1\text{و}_2$ کا وسطی نقطہ ص ہے۔

$\therefore\ 2\,\text{و}_1\text{و}_2 \times \text{ص ع} = \text{ر}_1^2 - \text{ر}_2^2$ جس سے حاصل ہوتا ہے کہ مرکزوں کو ملانے والے خط پر ع ایک ثابت نقطہ ہے۔

پس ثابت ہوا کہ نقطہ ط کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جو مرکزوں کے خط پر عمود وار ہے۔

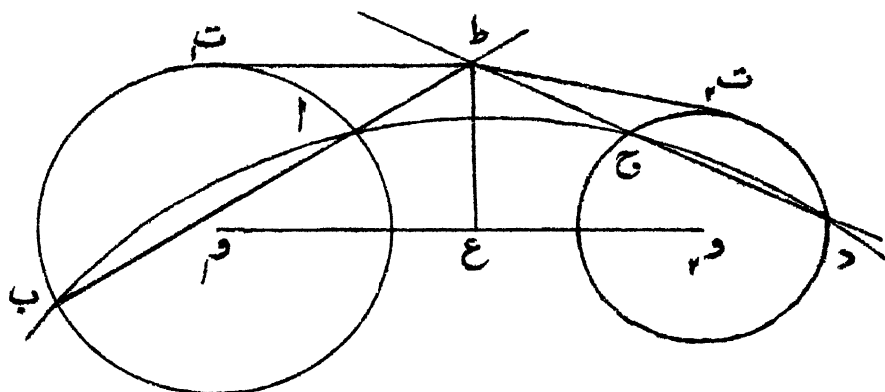
نوٹ - ثبوت بالا میں یہ بات ضمناً ثابت ہوئی ہے کہ نقطہ ع مرکزوں کے خط کو دو ایسے حصّوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے مربعوں کا فرق دیے ہوئے دائروں کے نصف قطروں کے مربعوں کے فرق کے مساوی ہے۔

طالب علم بطور مشق کے یہ ثابت کرے کہ اس صورت میں طریق کی دوسری شرط بھی پوری ہوتی ہے یعنی اس طریق پر کے کسی نقطہ سے دائروں تک کھینچے ہوئے مماسات مساوی ہیں۔

۶۳ - تعریف - اُس نقطہ کا طریق جس سے دو دیے ہوئے دائروں تک کھینچے ہوئے مماس مساوی ہوں دیے ہوئے دائروں کا **بنیادی محور** کہلاتا ہے۔

نوٹ (۱) - اگر دیے ہوئے دائرے متقاطع ہوں تو صریحاً اُن کے نقاطِ تقاطع مطلوبہ طریق پر واقع ہیں۔ اس لیے مطلوبہ طریق ان نقاطِ تقاطع میں سے گزرنے والا خطِ مستقیم یعنی دیے ہوئے دائروں کا وترِ مشترک (ممدودہ) ہے۔ وترِ مشترک کے اس حصہ پر کے کسی نقطہ سے جو دیے ہوئے دائروں کے اندر ہے دائروں کے کوئی حقیقی مماس نہیں کھینچ سکتے ہیں، لیکن کہا جاتا ہے کہ خیالی مماس کھینچ سکتے ہیں اور ان کے خیالی طول مساوی ہیں۔ اس نکتہ کی مزید تشریح ہندسۂ تحلیلی کی کسی کتاب میں پائی جا سکتی ہے۔

نوٹ (۲)۔ اگر دیئے ہوئے دائرے غیر متقاطع ہوں تو نقطۂ ع دونوں دائروں کے باہر واقع ہوگا۔ اس لیے مطلوبہ طریق کلیتہً دونوں دائروں کے باہر واقع ہوگا۔

۶۴۔ دو دیئے ہوئے دائروں (و۱) اور (و۲) کا بنیادی محور کھینچنا۔

کوئی دائرہ کھینچو جو دائرہ (و۱) کو ا اور ب پر اور دائرہ (و۲) کو ج اور د پر قطع کرے۔ ا ب اور ج د کے نقطۂ تقاطع ط سے مرکزوں کے خط و۱ و۲ پر عمود ط ع نکالو۔

تب ط ع مطلوبہ بنیادی محور ہوگا۔

نقطہ ط سے دائروں (و۱) اور (و۲) کے مماس ط ت۱ اور ط ت۲ کھینچو۔

$ط ت_1^2 = ط ا \times ط ب$ .... (۱)

اور $ط ت_2^2 = ط ج \times ط د$ .... (۲)

چونکہ نقاط ا، ب، ج، د مشترک المحیط ہیں۔

اس لیے $ط ا \times ط ب = ط ج \times ط د$ .... (۳)

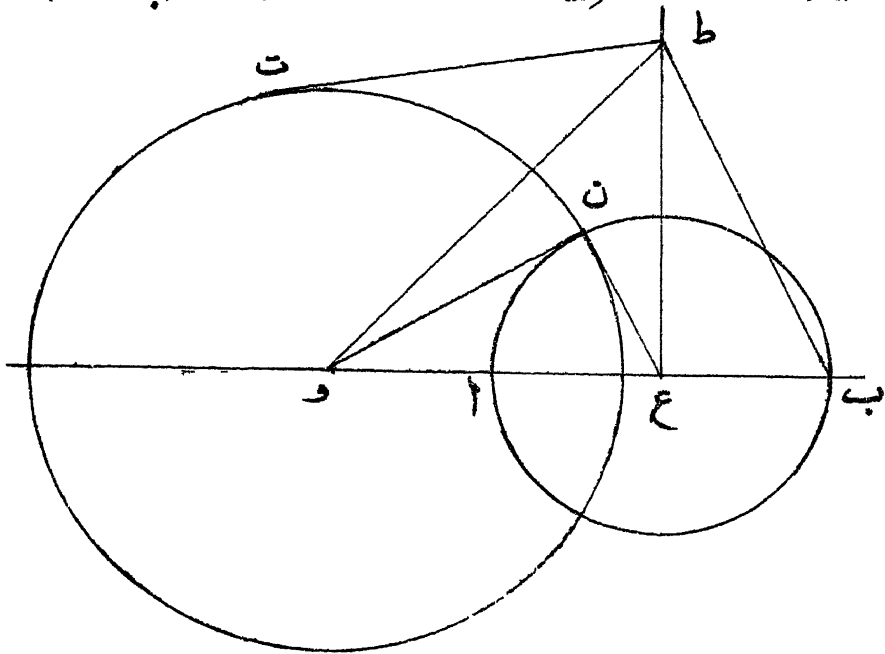
(۱)، (۲) اور (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$ط ت_1^2 = ط ت_2^2$

یعنی $ط ت_1 = ط ت_2$

یعنی نقطہ ط دیے ہوئے دائروں (ق۱) اور (ق۲) کے بنیادی محور پر کا ایک نقطہ ہے ۔ اور چونکہ ط ع مرکزوں کے خط ق۱ ق۲ پر عمود ہے، اس لیے ط ع دیے ہوئے دائروں کا بنیادی محور ہے ۔

نوٹ ۔ متقاطع دائروں کا بنیادی محور کھینچنے کے لیے اس طولانی عمل کی ضرورت نہیں ہے کیونکہ اُن کے نقاطِ تقاطع میں سے گزرنے والا خطِ مستقیم ہی بنیادی محور ہوتا ہے ۔

۶۵ ۔ مسئلہ ۔ اگر ایسے دائرے کھینچے جائیں جن کے مرکز ایک دیے ہوئے دائرہ کے ایک قطر ممدودہ پر ہوں اور جو دیے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کریں تو ان دائروں میں سے کسی دو دائروں کا بنیادی محور وہ خطِ مستقیم ہوگا جو دیے ہوئے دائرہ کے مرکز میں سے گذرے اور دیے ہوئے قطر پر عمود وار ہو ۔

فرض کرو کہ دیا ہوا دائرہ (ع) ہے ۔ اُس کے ایک ثابت قطر ا ب ممدودہ پر کوئی نقطہ و لو اور و کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچو جو دائرہ (ع) کو نقطہ ن پر

علی القوائم قطع کرے۔ دیے ہوئے دائرہ کے مرکز ع میں سے ایک خطِ مستقیم کھینچو جو ثابت قطر ا ب پر عمود وار ہو اور اس قطر پر کوئی نقطہ ط لو اور ط سے دائرہ (و) کا مماس ط ت کھینچو۔

و ط، و ن، ع ن اور ط ب کو ملاؤ۔

تب $\text{ط ت}^2 = \text{ط و}^2 - \text{و ن}^2$

$= \text{ط ع}^2 + \text{و ع}^2 - (\text{و ع}^2 - \text{ع ن}^2)$

$= \text{ط ع}^2 + \text{ع ن}^2$

$= \text{ط ع}^2 + \text{ع ب}^2$

$= \text{ط ب}^2$ جو و کے تمام مقاموں کے لیے مستقل ہے۔

اس لیے دائرہ (و) جیسے کسی دو دائروں کا بنیادی محور خطِ مستقیم ع ط ہے۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

نوٹ۔ چونکہ نقطہ ع دائرہ (و) کے باہر واقع ہے، اس لیے بنیادی محور ع ط دائرہ (و) کو قطع نہیں کرتا ہے۔ اس لیے ظاہر ہے کہ (ر) جیسے دائروں میں سے کوئی دو دائرے ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے ہیں۔

۶۶۔ تعریفات۔ اگر دائروں کا ایک نظام ایسا ہو کہ ان میں سے کسی دو دائروں کا ایک ہی بنیادی محور ہو تو یہ دائرے **ہم محور دائرے** کہلاتے ہیں۔

دفعہ گذشتہ میں نہ قطع کرنے والے ہم محور دائروں کا ایک نظام حاصل کرنے کے طریقہ کی تشریح کی گئی ہے۔ ظاہر ہے کہ دائرہ (و) کا مرکز دائرہ (ع) کے قطر ا ب کے اندر واقع نہیں ہو سکتا

یعنی ع و $\not>$ ع ا۔

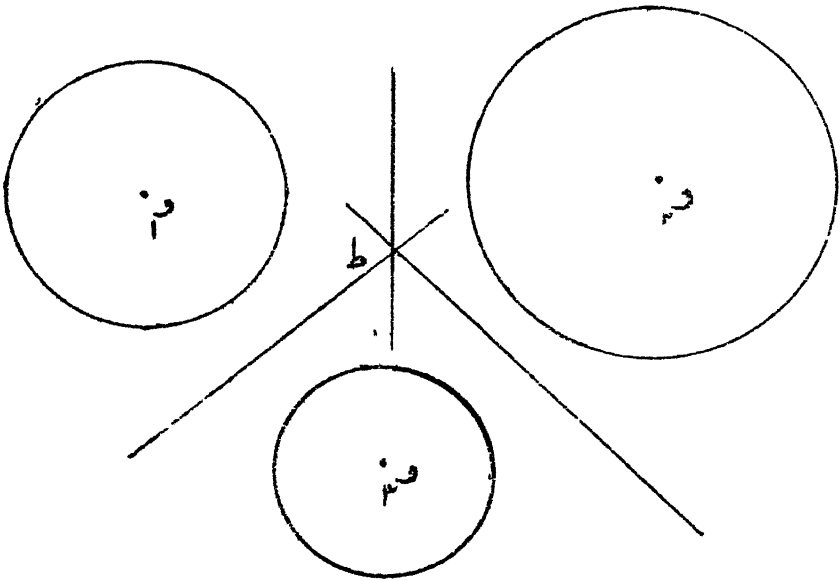
نیز $\text{و ن}^2 = \text{و ع}^2 - \text{ع ن}^2$

$= \text{و ع}^2 - \text{ع ا}^2$

اس لیے جوں جوں نقطہ و دائرہ (ع) کے قریب آتا ہے، ویسے ہی دائرہ (و) کا نصف قطر بتدریج گھٹتا ہے اور جب نقطہ و نقاط ا اور ب میں سے کسی ایک پر منطبق ہوتا ہے تو دائرہ (و) کا نصف قطر صفر ہے۔ نقاط ا اور ب

ہم محور دائروں کے اُس نظام کے **انتہائی نقطے** کہلاتے ہیں جس کا ہر رُکن دائرہ (ع) کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔ ہم محور دائروں کے نظام کے انتہائی نقطے نظام کے نقطہ دائرے بھی کہلاتے ہیں۔

اگر متعدد دائرے ایسے ہوں کہ ان میں سے ہر ایک دائرہ دو ثابت نقطوں میں سے گزرتا ہے تو ان دائروں سے قطع کرنے والے ہم محور دائروں کا ایک نظام حاصل ہوتا ہے اور اس نظام کا چھوٹے سے چھوٹا دائرہ وہ دائرہ ہے جو وترِ مشترک کے قطر پر کھینچا گیا ہے۔ اس لیے قطع کرنے والے ہم محور دائروں کے نظام کی صورت میں انتہائی نقطے یا نقطہ دائرے وجود نہیں رکھتے ہیں۔

۹۷۔ **مسئلہ**۔ تین دائروں میں سے دو دو دائروں کے تین بنیادی محور متراکز ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ (م۱)، (م۲) اور (م۳) تین دیے ہوئے دائرے ہیں۔
نیز فرض کرو کہ دائروں (م۱) اور (م۲) کا بنیادی محور دائروں (م۲) اور (م۳) کے بنیادی محور کو نقطہ ط پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرنا ہے کہ دائروں (م۳) اور (م۱)

بنیادی محور نقطہ ط میں سے گزرتا ہے۔
چونکہ نقطہ ط دائروں (و۱) اور (و۲) کے بنیادی محور پر ہے، اس لیے ط سے دائروں (و۱) اور (و۲) تک کھنچے ہوئے مماسوں کے طول مساوی ہیں۔
اسی طرح سے ط سے دائروں (و۲) اور (و۳) تک کھنچے ہوئے مماسوں کے طول بھی مساوی ہیں۔
اس لیے ط سے دائروں (و۳) اور (و۱) تک کھنچے ہوئے مماسوں کے طول مساوی ہیں۔
اس لیے نقطہ ط دائروں (و۳) اور (و۱) کے بنیادی محور پر واقع ہے۔
یعنی دائروں (و۳) اور (و۱) کا بنیادی محور نقطہ ط میں سے گزرتا ہے۔
تعریف۔ تین دائروں میں سے دو دو کے تینوں بنیادی محوروں کے نقطۂ تراکز کو ان دائروں کا **بنیادی مرکز** کہتے ہیں۔
نوٹ (۱)۔ اگر دیے ہوئے تینوں دائروں کے مرکز ہم خط ہوں تو ظاہر ہے کہ تینوں بنیادی محور متوازی ہونگے اور اس صورت میں ان کا نقطۂ تقاطع یعنی بنیادی مرکز لاتناہی پر ہوگا۔
نوٹ (۲)۔ اگر بنیادی محوروں کا نقطۂ تقاطع دیے ہوئے تین دائروں میں سے ایک کے اندر ہو (جس کا لازمی نتیجہ یہ ہے کہ وہ دوسرے دو دائروں کے بھی اندر ہوگا) تو نقطہ ط سے دیے ہوئے دائروں تک حقیقی مماس نہیں کھنچ سکتے۔ اس لیے مسئلۂ بالا کے ثبوت میں مناسب تبدیلی کی ضرورت ہوگی۔ یہ ثبوت بطور مشق کے طالب علم خود بہم پہنچائے۔
نوٹ (۳)۔ اگر بنیادی محوروں کا نقطۂ تقاطع ط دائروں کے اندر ہو تو اس صورت میں بھی نقطۂ ط کو دیے ہوئے تین دائروں کا بنیادی مرکز کہتے ہیں۔ ہندسۂ تحلیلی میں یہ ثابت کیا جائیگا کہ اس صورت میں بنیادی مرکز سے دیے ہوئے تین دائروں تک کھنچے ہوئے خیالی مماسات کے خیالی طول مساوی ہیں۔

امثلہ

(۱) ثابت کرو کہ دو دائروں کا بنیادی محور ان دائروں کے مشترک مماسوں

کی تنصیف کرتا ہے ۔

(۲) اگر دو دائروں کے بنیادی محور پر کے کسی نقطہ سے ان دائروں میں سے کسی ایک کا مماس کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا مرکز یہ نقطہ ہے اور نصف قطر مماس کا طول ہے دیے ہوئے دونوں دائروں کو علی القوائم قطع کرتا ہے ۔

(۳) اگر دو دائرے ایک دوسرے کو مس کریں تو ثابت کرو کہ ان کا بنیادی محور نقطۂ تماس پر کا مشترک مماس ہے ۔

(۴) اگر تین دائروں میں سے ہر دو ایک دوسرے کو مس کریں تو ثابت کرو کہ نقاطِ تماس پر کے مماس متراکز ہوتے ہیں ۔

(۵) اگر ایک مثلث کے ضلعوں کو قطر مان کر تین دائرے کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان دائروں کا بنیادی مرکز مثلث کا مرکزِ عمودی ہے ۔

(۶) تین دیے ہوئے دائروں کا بنیادی مرکز و ہے اور و سے ان دائروں میں سے کسی ایک کا مماس وت کھینچا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا مرکز و اور نصف قطر وت ہے دیے ہوئے تینوں دائروں کو علی القوائم قطع کرتا ہے ۔

(۷) ثابت کرو کہ وہ تمام دائرے جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزریں اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کریں ایک اور ثابت نقطہ میں سے بھی گزرینگے ۔

(۸) اُن دائروں کے مرکزوں کا طریق معلوم کرو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزریں اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کریں ۔

(۹) ایک دائرہ کھینچو جو دو دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کرے ۔

(۱۰) ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور دو دیے ہوئے دائروں کو علی القوائم قطع کرے ۔

(۱۱) (و۱) اور (و۲) دو دیے ہوئے دائرے ہیں ۔ نقطہ ط اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ط سے دائروں (و۱) اور (و۲) تک کھنچے ہوئے مماسوں کے مربعوں کا فرق مستقل ہے ۔ ثابت کرو کہ ط کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جو دیے ہوئے دائروں کے بنیادی محور کے متوازی ہے ۔

پانچواں باب

دائروں کا بنانا

۶۸۔ تین شرائط کے دیے جانے پر ایک دائرہ بنایا جا سکتا ہے۔ مثلاً (۱) تین دیے ہوئے نقطوں میں سے جو ایک خطِ مستقیم میں نہیں ہیں ایک دائرہ کھینچ سکتا ہے (۲) ایک دائرہ کھینچ سکتا ہے جس کا نصف قطر دیا ہوا ہو اور جو ایک دیے ہوئے خط (یا دائرہ) کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرے۔

۶۹۔ دو شرائط کو پورا کرنے والے دائروں کے مرکزوں کے طریق کے متعلق مندرجۂ ذیل اہم نتائج سے طالب علم پہلے ہی سے واقف ہوگا۔

(۱) اُس دائرہ کے مرکز کا طریق جس کا نصف قطر معلوم ہو اور جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گذرے ایک دائرہ ہے جس کا مرکز دیے ہوئے نقطہ پر ہے۔

(۲) اُس دائرہ کے مرکز کا طریق جو دو دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرے دیے ہوئے نقطوں کو ملانے والے خطِ مستقیم کا عمودی منصّف ہے۔

(۳) اُس دائرہ کے مرکز کا طریق جو دو دیے ہوئے متقاطع خطوط کو مس کرے اِن خطوط کے درمیانی زاویوں کے منصّف ہیں۔

(۴) ایک دیے ہوئے خط کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرنے والے دائرہ کے مرکز کا طریق ایک خط ہے جو نقطۂ مذکور میں سے گزرتا ہے اور دیے ہوئے خط پر عمود ہے۔

(۵) ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک معلومہ نقطہ پر مس کرنے والے دائرہ کے مرکز کا طریق معلومہ نقطہ کو دائرہ کے مرکز سے ملانے والا خط ہے۔

(۶) ایک ایسے دائرہ کے مرکز کا طریق جس کا نصف قطر معلوم ہے اور جو ایک دیے ہوئے خط کو مس کرتا ہے دیے ہوئے خط کے متوازی خطوط کا ایک جوڑا ہے۔

(۷) ایک ایسے دائرہ کے مرکز کا طریق جس کا نصف قطر معلوم ہے اور جو ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرتا ہے دیے ہوئے دائرہ کے ساتھ ہم مرکز دائروں کا ایک جوڑا ہے۔

امثلہ ۱۸

(۱) ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے خط کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرے۔

(۲) دیے ہوئے نصف قطر والا ایک دائرہ کھینچو جو دو معلومہ نقطوں میں سے گزرے۔

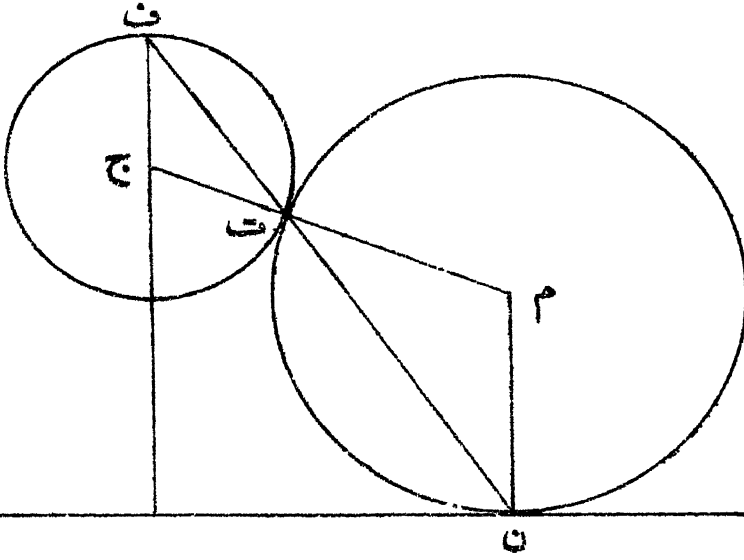
(۳) دیے ہوئے نصف قطر والا دائرہ کھینچو جو دو دیے ہوئے خطوں (یا دائروں) کو مس کرے۔ اس سوال کے کتنے حل ہیں؟

(۴) دیے ہوئے نصف قطر والا ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے خط کو یا ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرے۔

(۵) ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرے۔

۷۰ - مسئلہ عملی - ایک دائرہ کھینچنا جو ایک دیے ہوئے دائرہ (ج) کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم لا ما کو ایک دیے ہوئے نقطہ ن پر مس کرے۔

تحلیل - فرض کرو کہ دائرہ (م) مطلوبہ دائرہ ہے اور یہ دیے ہوئے دائرہ (ج) کو نقطۂ ت پر مس کرتا ہے -

ف
ج
ت
م
ما ن ل

فرض کرو کہ ن ت دائرہ (ج) سے کر نقطہ ف پر ملتا ہے -
ج ف، ج ت، م ت اور م ن کو ملاؤ -
مثلث متساوی الساقین م ن ت میں

∠ م ن ت = ∠ م ت ن .... (۱)

نیز مثلث متساوی الساقین ج ت ف میں

∠ ج ف ت = ∠ ج ت ف .... (۲)

لیکن چونکہ دائرہ (م) دائرہ (ج) کو نقطہ ت پر مس کرتا ہے
اس لیے م ت ج خطِ مستقیم ہے

اس لیے ∠ م ت ن = ∠ ج ت ف .... (۳)

نتائج (۱)، (۲)، (۳) کو ملانے سے حاصل ہوتا ہے کہ

∠ م ن ت = ∠ ج ف ت

اس لیے ج ف ∥ م ن

اب چونکہ دائرہ (م) خط لاما کو نقطہ ن پر مس کرتا ہے

اس لیے م ن عمود ہے لاما پر

اس لیے ج ف بھی عمود ہے لاما پر

پس اگر دیے ہوئے دائرہ کے مرکز ج سے دیے ہوئے خط لاما پر عمود کھینچا جائے تو اس عمود اور دائرہ (ج) کے نقطۂ تقاطع سے نقطہ ف حاصل ہوتا ہے اور ف ن اور دائرہ (ج) کا نقطۂ تقاطع ت مطلوبہ نقطۂ تماس ہے اور ج ت اور ن م کے تقاطع سے مطلوبہ دائرہ کا مرکز م حاصل ہوتا ہے۔

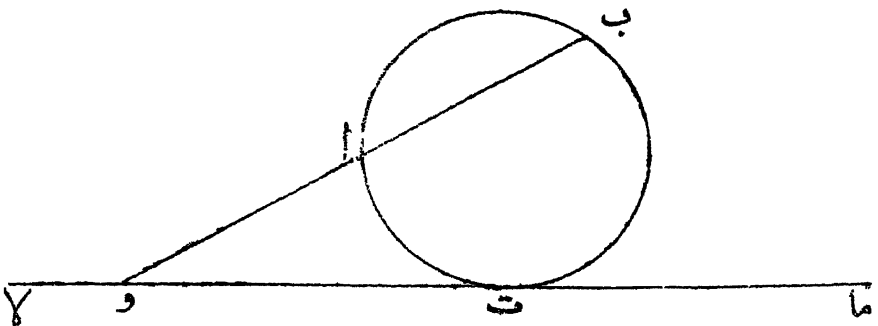
اس تحلیل کی بناء پر طالب علم اس عملی مسئلہ کا حل مع ثبوت خود بہم پہنچائے۔

نوٹ۔ وہ خط جو ج میں سے گزرتا ہے اور لا ما پر عمود ہے دائرہ (ج) کو ایک اور نقطۂ فَ پر بھی کاٹتا ہے جس کی مدد سے دیے ہوئے شرائط کو پورا کرنے والا ایک اور دائرہ بھی کھینچ سکتا ہے۔

نوٹ۔ مندرجۂ بالا طریقہ بآسانی ذیل کے عملی مسئلہ کے حل کے طریقہ کی طرف رہنمائی کرتا ہے۔

مسئلۂ عملی۔ ایک دائرہ کھینچنا جو ایک دیے ہوئے دائرہ (ج) کو ایک دیے ہوئے نقطۂ ت پر مس کرے اور ایک دیے ہوئے خط لاما کو بھی مس کرے۔

اس عملی مسئلہ کا حل مع ثبوت طالب علم خود بطور مشق کے بہم پہنچائے۔

۱۷ مسئلۂ عملی۔ ایک دائرہ کھینچنا جو ایک دیے ہوئے خط لاما کو مس کرے

اور دو دیے ہوئے نقطوں ا اور ب میں سے جو لاما کی ایک ہی جانب واقع ہوں، گزرے۔

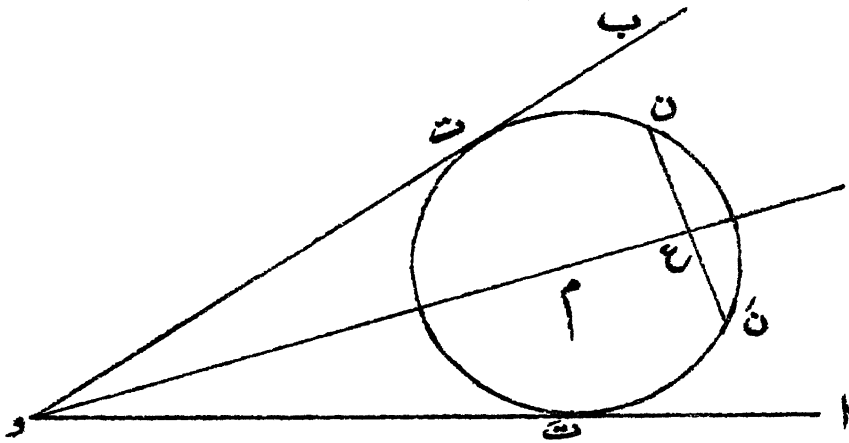
تحلیل۔ فرض کرو کہ مطلوبہ دائرہ دیے ہوئے خط لاما کو نقطہ ت پر مس کرتا ہے۔ نیز فرض کرو کہ خط ب ا دیے ہوئے خط لاما کو نقطہ و پر قطع کرتا ہے۔

تب　وت^2 = وا × وب جو معلوم ہے

اس لیے وت معلوم ہو سکتا ہے اور اس کی مدد سے دیے ہوئے خط لاما اور مطلوبہ دائرہ کا نقطۂ تماس ت حاصل ہوتا ہے۔ پس دائرہ ا ب ت مطلوبہ دائرہ ہے۔

نوٹ۔ چونکہ خط لاما پر و کی دوسری جانب ایک اور نقطہ تَ بھی ایسا لیا جا سکتا ہے کہ وت = وتَ، اس لیے ایک اور دائرہ ا ب تَ کھینچ سکتا ہے جو دیے ہوئے شرائط کو پورا کرتا ہے۔

طالب علم اس تحلیل کی بنا پر عمل حاصل کرے اور ثبوت بہم پہنچائے۔

۷۲۔ مسئلۂ عملی۔ ایک دائرہ کھینچنا جو دو دیے ہوئے متقاطع خطوط وا، وب کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے نقطہ ن میں سے گزرے۔

تحلیل۔ فرض کرو کہ مطلوبہ دائرہ (م) ہے۔ چونکہ دائرہ (م) خطوط وا

اور و ب کو مس کرتا ہے، اس لیے اس کا مرکز اِن خطوط کے درمیانی زاویہ کے منصِّف پر ہے۔

ن سے د م پر عمود ن ع نکالو اور اس کو اتنا خارج کرو کہ وہ دائرہ (م) سے مکرر نَ پر ملے۔

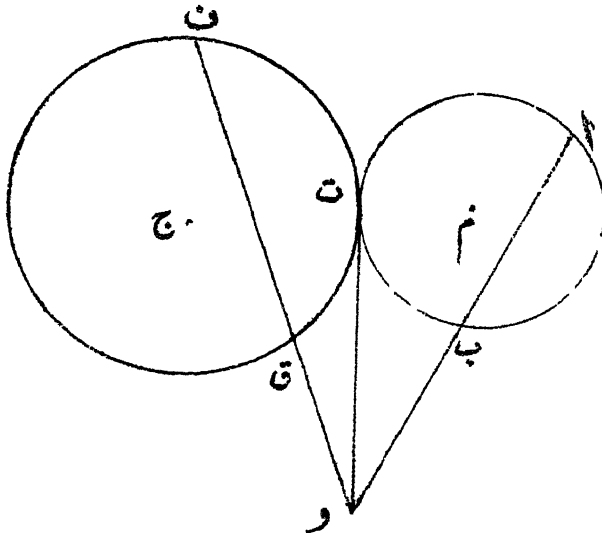
تب ن ع = ع نَ - پس نَ معلوم ہو سکتا ہے۔

اور مطلوبہ دائرہ وہ دائرہ ہے جو نقطوں ن اور نَ میں سے گزرتا ہے اور دیے ہوئے خطوط میں سے کسی ایک کو مس کرتا ہے۔

نوٹ (۱) - چونکہ دو ایسے دائرے کھنچ سکتے ہیں جو ن اور نَ میں سے گزرتے ہیں اور دیے ہوئے خطوط میں سے ایک کو مس کرتے ہیں، اس لیے اس عملی مسئلہ کے دو حل ہیں۔

نوٹ (۲) - اس صورت پر غور کرو جبکہ دیے ہوئے خط متوازی ہوں۔

نوٹ (۳) - اگر دیا ہوا نقطہ ن منصِّف و م پر ہو تو عمل کی تشریح کرو۔

۳۷ - مسئلۂ عملی - ایک دائرہ کھینچنا جو ایک دیے ہوئے دائرہ (ج) کو مس کرے اور دو دیے ہوئے نقطوں ا اور ب میں سے گزرے۔

تحلیل ۔ فرض کرو کہ مطلوبہ دائرہ (م) ہے جو دیے ہوئے دائرہ (ج) کو ت پر مس کرتا ہے ۔ فرض کرو کہ ت پر اِن دائروں کا مشترک مماس خط ا ب سے و پر ملتا ہے ۔
اب اگر و میں سے گزرنے والا کوئی خط دائرہ (ج) سے ف اور ق پر ملے تو و ف × و ق = و ت^2 = و ا × و ب
پس معلوم ہوا کہ ا، ب، ف، ق مشترک المحیط نقطے ہیں ۔
ترکیب ۔ مندرجۂ بالا تحلیل کی بناء پر مطلوبہ دائرہ کھینچنے کا عمل حسب ذیل حاصل ہوتا ہے ۔
کوئی دائرہ کھینچو جو ا اور ب میں سے گزرے اور دیے ہوئے دائرہ (ج) کو ف اور ق پر قطع کرے ۔ ا ب اور ف ق کے نقطۂ تقاطع و میں سے دیے ہوئے دائرہ (ج) کا مماس و ت کھینچو ۔
تب ا، ب، ت میں سے گزرنے والا دائرہ دیے ہوئے شرائط کو پورا کرتا ہے
طالب علم اس کا ثبوت خود بہم پہنچائے ۔
نوٹ (۱) ۔ و سے دائرہ (ج) کا ایک اور مماس و تَ بھی کھنچ سکتا ہے اس لیے ایک اور دائرہ ا ب تَ بھی حاصل ہوتا ہے جو دیے ہوئے شرائط کو پورا کرتا ہے ۔
نوٹ (۲) ۔ ظاہر ہے کہ اس عملی مسئلہ کا حل صرف اُس صورت میں ممکن ہے جب کہ دیے ہوئے نقطے ا اور ب دونوں دائرہ (ج) کے اندر ہوں یا دونوں باہر ۔ اگر ایک نقطہ اندر ہو اور دوسرا باہر تو دیے ہوئے شرائط کو پورا کرنے والا دائرہ کھینچنا ناممکن ہے ۔

امثلہ ۱۹

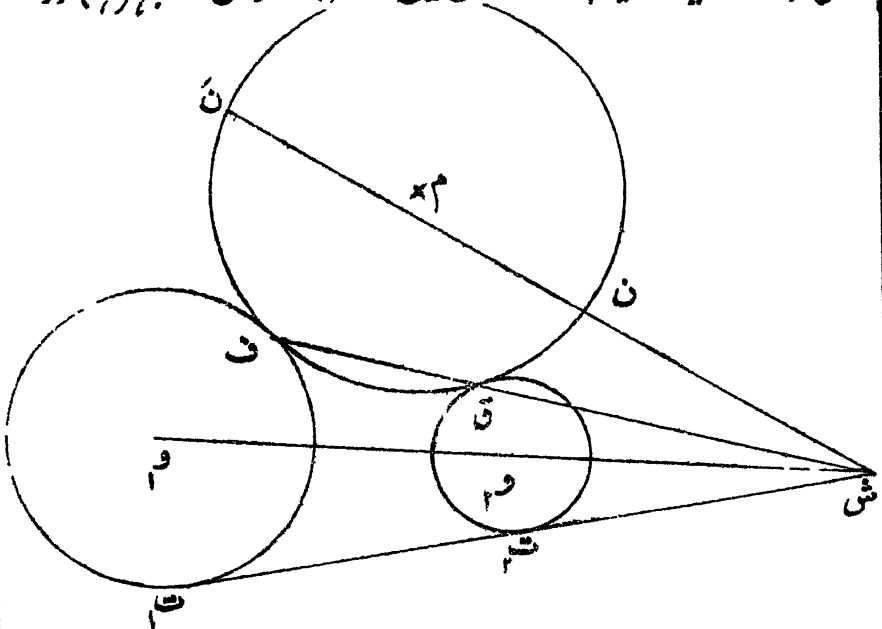
(۱) ایک رُبع دائرہ کے اندر جس کا نصف قطر ۴ سم ہے ایک دائرہ بناؤ ۔ اور اُس دائرہ کا نصف قطر محسوب کرو [جواب ۴ ($\sqrt{2}$ - ۱) انچ]
(۲) ایک دائرہ کھینچو جو حوالہ کے دونوں (علی القوائم) محوروں کو مس کرے اور نقطہ (۴، ۲) میں سے گزرے ۔ بتاؤ کہ ایسے دو دائرے کھنچ سکتے ہیں ۔ ان دائروں کے

نصف قطر محسوب کرو۔ [جواب :- (۴ ± √۸) انچ]

(۳) ایک مساوی الاضلاع مثلث کے اندر تین دائرے بناؤ جن میں سے ہر ایک مثلث کے دو ضلعوں اور باقی دو دائروں کو مس کرے۔ دائرہ کے نصف قطر کا طول مثلث کے ضلع کے طول اَ کی رقوم میں حاصل کرو۔ [جواب $\frac{\sqrt{۳}-۱}{۴}$ × اُ]

(۴) ۵ سمر نصف قطر والے دائرے کے اندر تین دائرے بناؤ جن میں سے ہر ایک دیے ہوئے دائرہ کو اور نیز باقی دو دائروں کو مس کرے۔ اگر ان تین دائروں میں سے ایک کا نصف قطر ر سمر ہو تو ثابت کرو کہ ر [۱ + قم ۶۰°] = ۵

(۵) ایک دائرہ کھینچو جو دو دیے ہوئے خطوط کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرے۔

(۶) ایک دائرہ کھینچو جو دو دیے ہوئے دائروں (و۱) اور (و۲) کو خارجاً مس کرے اور ایک دیے ہوئے نقطہ ن میں سے (جو دائروں کے باہر ہے) گزرے۔

[**تحلیل** ۔ فرض کرو کہ مطلوبہ دائرہ (م) ہے جو دیے ہوئے دائروں کو

ف اور ق پر مس کرتا ہے۔ خط ف ق مرکزوں کے خط و۱ و۲ سے سیدھی مشابہت کے مرکز ش پر ملتا ہے (دیکھو امثلہ ۱۴ سوال ۴)۔ فرض کرو کہ دیے ہوئے دائروں کا ایک راست مشترک مماس ت۱ ت۲ ہے، یہ مماس سیدھی مشابہت کے مرکز ش میں سے گزرتا ہے

اور ش ف × ش ق = ش ت۱ × ش ت۲ (دیکھو امثلہ ۱۴ سوال ۴)

فرض کرو کہ ش ن مطلوبہ دائرہ سے مکرر نَ پر ملتا ہے۔

تب ش ن × ش نَ = ش ف × ش ق = ش ت۱ × ش ت۲۔ اس لیے ن، ت۲، ت۱، نَ مشترک المحیط ہیں۔ اس بنا پر نقطہ نَ معلوم ہو سکتا ہے، پس وہ دائرہ جو معلوم نقطوں ن اور نَ میں سے گزرتا ہے اور دیے ہوئے دائروں میں سے کسی ایک کو خارجاً مس کرتا ہے دیے ہوئے شرائط کو پورا کرتا ہے۔

(۷) سوال بالا کی مدد سے ایک دائرہ کھینچو جو تین دیے ہوئے دائروں کو خارجاً مس کرے۔

(۸) ایک دائرہ کھینچو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے، ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو علی القوائم قطع کرے۔

(۹) ایک دائرہ کھینچو جس کا مرکز ایک دیے ہوئے خط پر ہو، جو ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرے اور ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے۔

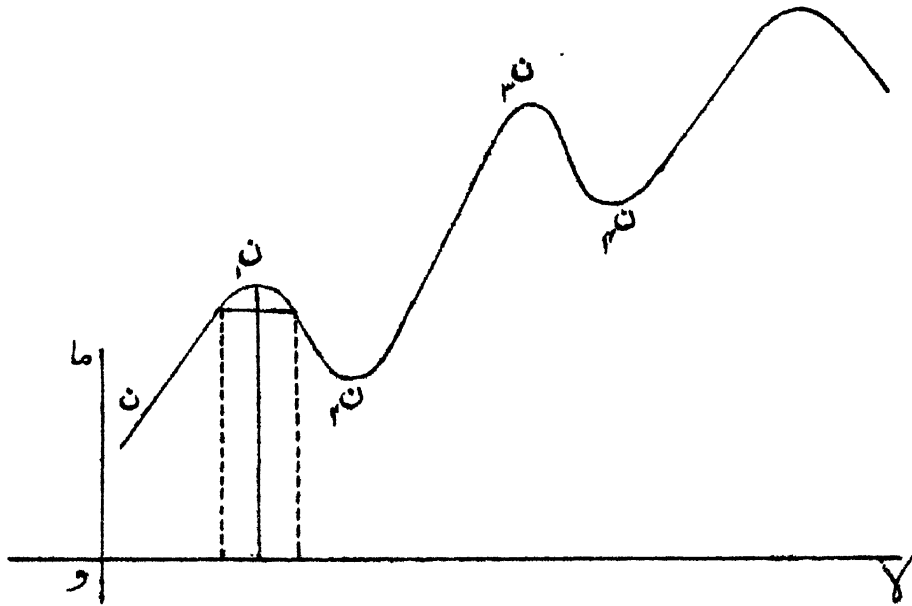
چھٹا باب

اعظم اقل

۴۷ ۔ جب کوئی ہندسی مقدار دیے ہوئے شرائط کے ماتحت مسلسل طور پر بدلتی ہے تو بعض اوقات یہ دریافت کرنا مطلوب ہوتا ہے کہ آیا اس تبدیلی کے دوران میں کوئی ایسے مقام ہیں جہاں یہ مقدار بڑھتے بڑھتے گھٹنا شروع ہوتی ہے یا گھٹتے گھٹتے بڑھنا شروع ہوتی ہے ۔ اگر ایسے مقام ہوں تو اول الذکر نوعیت کے مقام کے لیے متغیر مقدار کی قیمت کو اعظم قیمت اور آخر الذکر نوعیت کے مقام کے لیے اس کی قیمت کو اقل قیمت کہتے ہیں۔ بالفاظِ دیگر اگر کسی متغیر مقدار کی قیمت کسی خاص مقام پر اعظم ہے تو اس مقام کے عین قرب میں متغیر مقدار کی تمام قیمتوں سے اعظم قیمت بڑی ہوگی ۔ اسی طرح اگر متغیر مقدار کی قیمت کسی خاص مقام پر اقل ہے تو اس مقام کے عین قرب میں متغیر مقدار کی تمام قیمتوں سے اقل قیمت چھوٹی ہوگی ۔

صفحہ ۱۱۴ پر کی شکل میں نقطہ ن کے معین کی تبدیلی پر غور کرو جب کہ نقطہ ن منحنی پر حرکت کرے ۔ مقام ن۱ پر معین کا طول اعظم ہے کیونکہ اس مقام پر معین کی قیمت قرب و جوار کی تمام قیمتوں سے بڑی ہے اور اسی طرح ن۳ پر بھی معین اعظم ہے ۔ نیز ن۲ اور ن۴ پر معین اقل ہے ۔

واضح رہے کہ بالعموم اعظم قیمت سے مراد بڑی سے بڑی قیمت

نہیں ہوتی۔

مثلاً شکل بالا میں ن۱ پر معین اعظم ہے لیکن یہ قیمت معین کی قیمتوں میں سب سے بڑی نہیں ہے۔ اسی طرح اقل کے لیے۔

اِس باب میں ہم صرف ایسی تبدیلیوں پر غور کرینگے جن میں متغیر مقدار صرف ایک مرتبہ اعظم یا اقل قیمت اختیار کرتی ہے۔ ایسی صورتوں میں اعظم قیمت درحقیقت بڑائی سے بڑی قیمت ہے اور اقل قیمت چھوٹی سے چھوٹی۔

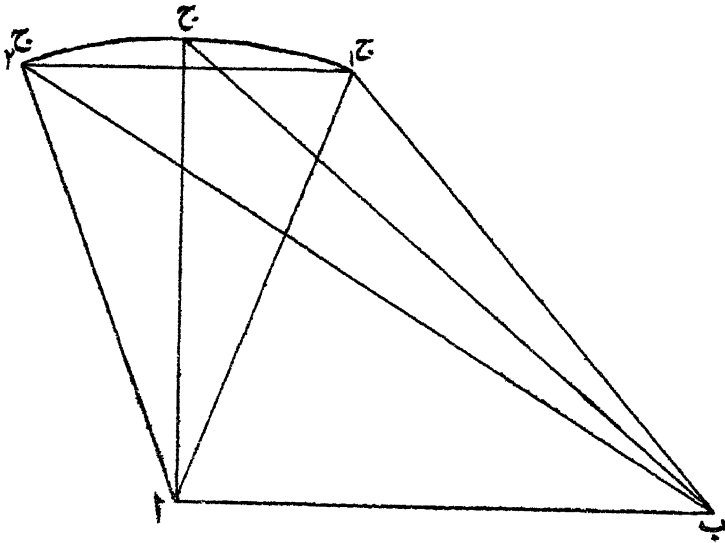
۵۷۔ بالعموم اعظم یا اقل قیمتوں کی تحقیق میں مندرجۂ ذیل اشارے کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

(۱) مقدار متغیر کی دو مساوی قیمتوں کے درمیان کم از کم ایک اعظم یا اقل قیمت ہوگی جو شکل بالا سے واضح ہے۔

عملاً مقدار متغیر کی اعظم یا اقل قیمت یہ فرض کرنے سے دریافت کی جاتی ہے کہ اس مقام کے مخالف جانب قریب کے دو مقامات کے لیے متغیر مقدار کی قیمتیں مساوی ہیں اور بالآخر یہ مساوی قیمتیں اعظم یا اقل قیمت پر منطبق ہو جاتی ہیں۔

(۲) عموماً مقامِ تشاکل پر اعظم یا اقل قیمت واقع ہوتی ہے۔

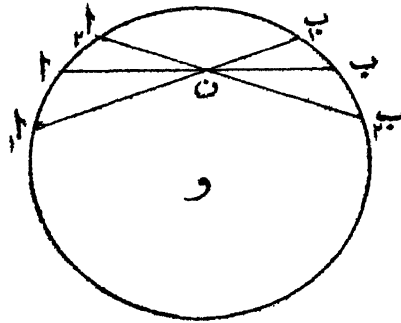
۷۶ ۔ مسئلہ - اگر ایک مثلث کے دو ضلعے دیے ہوئے ہوں تو مثلث کا رقبہ اعظم ہوگا جب کہ ان ضلعوں کا درمیانی زاویہ قائمہ ہو۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کے اضلاع ا ب، ا ج دیے گئے ہیں۔ نیز فرض کرو کہ ضلع ا ب کا مقام ثابت ہے۔ تب ج کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز ا ہے اور جس کا نصف قطر دیا ہوا ضلع ا ج ہے۔

فرض کرو کہ راس کے مقام ج کے لیے مثلث ا ب ج کا رقبہ اعظم ہے۔ اس مقام کے مخالف جانب ج کے طریق پر دو قریب کے نقطے ج۱ اور ج۲ ایسے لو کہ مثلثات ا ب ج۱ اور ا ب ج۲ کے رقبے مساوی ہوں۔ تب ج۱ ج۲ // ا ب کے۔ جب ج۱ اور ج۲ دونوں ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں تو ج۱ ج۲ سے گزرنے والا خط نقطہ ج پر کا مماس ہوگا اس لیے اگر △ ا ب ج کا رقبہ اعظم ہے تو ج پر دائرہ (۱) کا مماس قاعدہ ا ب کے متوازی ہوگا یعنی ∠ ج ا ب = قائمہ، یہی ثابت کرنا تھا۔

نوٹ - $\triangle = \frac{1}{2}$ ب جَ جب ا میں بَ، جَ مستقل ہیں - اس لیے

$\triangle$ اعظم ہوگا جبکہ جب ا اعظم ہو -

یعنی ا = ۹۰° اور اعظم رقبہ = $\frac{1}{2}$ بَ جَ

۷۷ - مسئلہ - ایک دیے ہوئے دائرہ (و) کے اندر کے ایک ثابت نقطہ ن میں گزرنے والے تمام وتروں میں وہ وتر جس کی تنصیف نقطہ ن پر ہوتی ہے اقل ہے -

فرض کرو کہ وتر ا ن ب کا طول اقل ہے -

نیز فرض کرو کہ اس کے مخالف جانب دو قریب کے اور مساوی طول والے وتر ا۱ ن ب۱، ا۲ ن ب۲ ہیں -

چونکہ ا۱ ب۱ = ا۲ ب۲

اس لیے قطعہ ا۱ ا۲ ب۱ کا رقبہ = قطعہ ا۲ ب۱ ب۲ کا رقبہ

یعنی $\triangle$ ا۱ ن ا۲ = $\triangle$ ب۱ ن ب۲

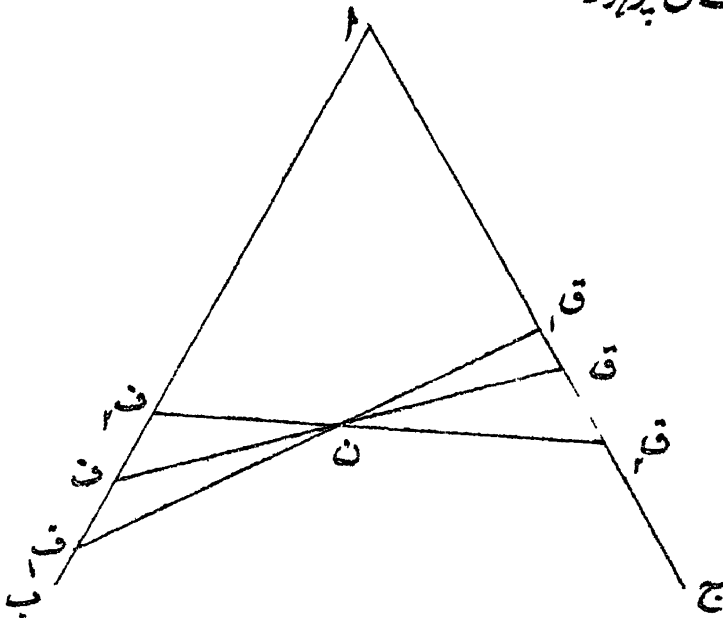
لیکن ان مثلثات کے مشترک راس ن پر کے زاویے مساوی ہیں

اس لیے ن ا۱ × ن ا۲ = ن ب۱ × ن ب۲

انتہا میں نقاط ا۱ اور ا۲ دونوں ا پر منطبق ہوتے ہیں اور ب۱ اور ب۲ دونوں ب پر

اس لیے $ن ا^2 = ن ب^2$ یعنی $ن ا = ن ب$ یعنی اقل وتر اب کی تنصیف دیے ہوئے نقطہ ن پر ہوتی ہے۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

مشق۔ شکل بالا میں ثابت کرو کہ وتر ا ن ب دائرہ سے اقل رقبہ والا قطعۂ صغیر اور اعظم رقبہ والا قطعۂ کبیر قطع کرتا ہے۔

۷۸۔ دو متقاطع خطوط اب، اج دیے گئے ہیں۔ اور ∠ ب اج کے اندر ایک ثابت نقطہ ن ہے۔ اگر ن میں سے گزرنے والا کوئی خط خطوط اب، اج سے ف اور ق پر ملے تو مثلث ف ا ق کا رقبہ اقل ہوگا جبکہ ف ق کی تنصیف ن پر ہو۔

فرض کرو کہ △ ا ف ق کا رقبہ اقل ہے۔ ف ق کے مخالف جانب ن میں سے گزرنے والے دو قریب کے خط $ف_1 ن ق_1$ اور $ف_2 ن ق_2$ ایسے لو کہ مثلث $ف_1 ا ق_1$ کا رقبہ = مثلث $ف_2 ا ق_2$ کا رقبہ

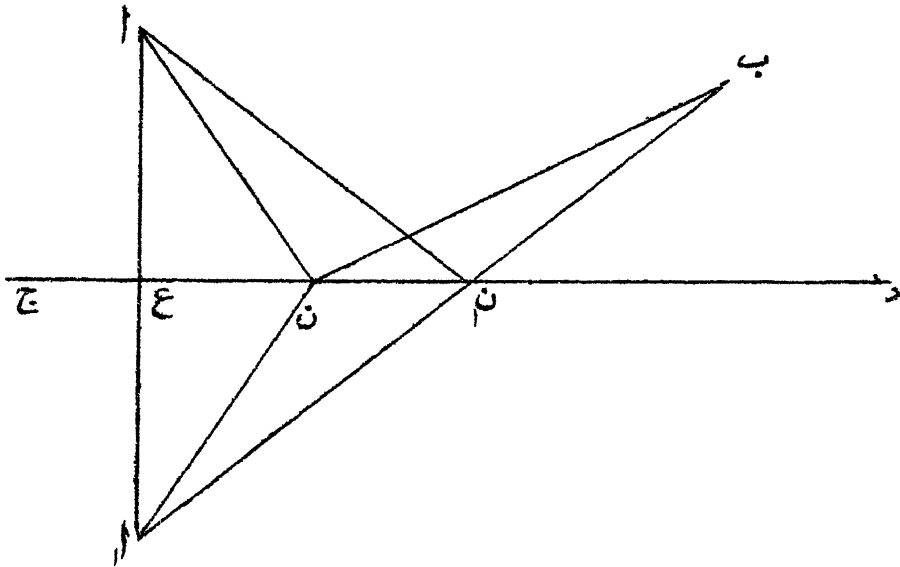
تب مثلث $ف_1 ن ف_2$ = مثلث $ق_1 ن ق_2$ اور ان مثلثات کے مشترک راس ن پر کے زاویے مساوی ہیں۔

اس لیے $ن ف_1 \times ن ف_2 = ن ق_1 \times ن ق_2$ اور انتہا میں جب

ف، ق، اور ف، ق، دونوں خط ف ق پر منطبق ہوتے ہیں تو
ن ف^{۲} = ن ق^{۲} یعنی ن ف = ن ق۔ یہی ثابت کرنا تھا۔

۷۹۔ ذیل میں اعظم اقل قیمتوں کی تحقیق کے خالص ہندسی طریقوں کی تشریح کی جائیگی۔

مسئلہ۔ اگر ایک لامحدود خط ج د کی ایک ہی جانب کے دو ثابت نقطوں ا اور ب کو خط پر کے کسی نقطہ ن سے ملایا جائے تو ا ن اور ب ن کا مجموعہ اقل ہوگا جبکہ یہ خطوط دیے ہوئے خط ج د کے ساتھ مساوی زاویے مخالف سمتوں میں بنائیں۔

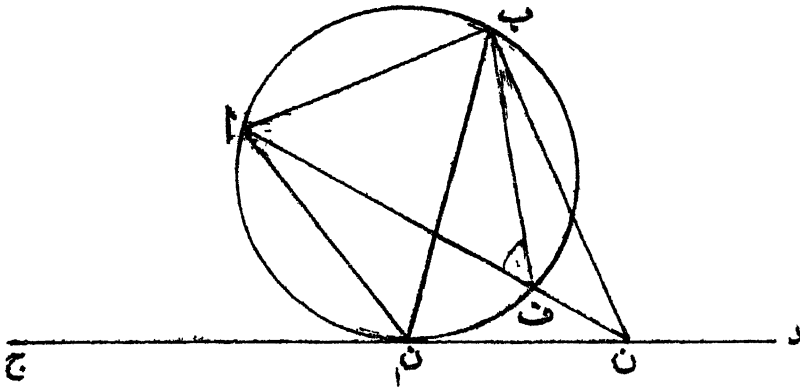
ا سے ج د پر عمود ا ع نکالو اور ا ع ممدودہ پر نقطہ ا، ایسا لو کہ ا ع = ع ا،

ا، ب کو ملاؤ جو ج د کو ن، پر قطع کرے۔
ج د پر کوئی نقطہ ن لو ا ن، ب ن اور ا، ن کو ملاؤ۔
ثابت کرو کہ (۱) ا ن، = ا، ن،
(۲) ا ن، + ب ن، = ا، ب
(۳) ∠ ا ن، ج = ∠ ب ن، د

(۴) ان = ا‌ٖن

(۵) ان + ب ن = ا‌ٖن + ب ن > ا‌ٖب

(٦) نتائج (۲) اور (۵) سے ثابت کرو کہ ا‌ٖن + ب ن‌ٖ < ا ن + ب ن

مشق - اگر دیے ہوئے نقاط ا، ب ثابت خط ج د کے مخالف جانب واقع ہوں اور ج د پر کوئی نقطہ ن ہو تو ثابت کرو کہ ان ~ ب ن اعظم ہوگا جبکہ یہ خط دیے ہوئے خط ج د سے مساوی زاویے بنائیں ۔

۸۰ - مسئلہ - ایک لامحدود ثابت خط ج د کی ایک ہی جانب دو ثابت نقطے ا اور ب ہوں اور خط ج د پر کوئی متحرک نقطہ ن ہو تو > ا ن ب اعظم ہوگا جبکہ دائرہ ا ن ب دیے ہوئے خط ج د کو مس کرے ۔

ایک دائرہ کھینچو جو ا ب میں سے گزرے اور ج د کو مس کرے - فرض کرو کہ نقطۂ تماس ن‌ٖ ہے ۔

ج د پر کوئی دوسرا نقطہ ن لو ۔

ثابت کرنا ہے کہ > ا ن‌ٖ ب بڑا ہے > ا ن ب سے

فرض کرو کہ ا ن دائرہ کو ف پر قطع کرتا ہے

ف ب کو ملاؤ

< ا ن، ب = < ا ف ب جو بڑا ہے < ا ن ب سے - یہی ثابت کرنا تھا۔
نوٹ - ا، ب میں سے گزرنے والے اور خط ج د کو مس کرنے والے دو دائرے کھنچ سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ دوسرا دائرہ خط ج د کو ن، پر مس کرتا ہے اس صورت میں بھی < ا ن، ب اعظم ہوگا - پس < ا ن ب کی دو اعظم قیمتیں ہیں جو ن کے مقامات ن اور ن، کے لیے حاصل ہوتی ہیں واضح ہو کہ بالعموم یہ دو قیمتیں مساوی نہ ہونگی - اگر ب ا، ج د سے لا پر ملے تو متحرک نقطۂ ن کے مقام لا کے لیے < ا ن ب کی قیمت صفر ہے، جو زاویہ ا ن ب کی اقل قیمت ہے۔
پس ضمناً معلوم ہوا کہ دو اعظم قیمتوں کے درمیان کم از کم ایک اقل قیمت واقع ہوتی ہے۔
۸۱ - ذیل میں اعظم اقل قیمتوں کی تحقیق کے چند ایسے مسائل درج کیے جاتے ہیں جو جبریہ متماثلات کی مدد سے بآسانی حاصل ہوئے ہیں۔
مسئلہ۔ اگر ایک دیے ہوئے محدود خط ا ب پر کوئی نقطہ ن ہو تو ا ن × ن ب اعظم ہوگا جبکہ ن وسطی نقطہ ہو ا ب کا۔
فرض کرو کہ ا ن = لا اور ن ب = ما
از روئے سوال لا + ما مستقل ہے
اب ذیل کے متماثلہ پر غور کرو ۴ لا ما = (لا + ما)^2 - (لا - ما)^2
ہمیں لا ما کی اعظم قیمت معلوم کرنا ہے، اس صورت میں ۴ لا ما بھی اعظم ہوگا۔
چونکہ اوپر کے متماثلہ میں (لا + ما)^2 مستقل ہے، اس لیے ۴ لا ما اعظم ہوگا جبکہ (لا - ما)^2 (جو منفی نہیں ہوسکتا) اپنی چھوٹی سے چھوٹی قیمت یعنی قیمت صفر اختیار کرے۔
یعنی جبکہ لا = ما
یعنی ا ن = ن ب یہی ثابت کرنا تھا۔
۸۲ - **مسئلہ**۔ اگر ایک دیے ہوئے محدود خط ا ب پر کوئی نقطہ ن ہو تو ا ن^2 + ن ب^2 اقل ہوگا جبکہ ن وسطی نقطہ ہو ا ب کا۔
فرض کرو کہ ا ن = لا اور ن ب = ما
از روئے سوال لا + ما مستقل ہے

اب ذیل کے متماثلہ پر غور کرو۔

$$۲\ (لا^۲ + ما^۲) = (لا + ما)^۲ + (لا - ما)^۲\ .$$

بائیں جانب میں $(لا + ما)^۲$ مستقل ہے اور $(لا - ما)^۲$ منفی نہیں ہو سکتا ہے

اس لیے $۲\ (لا^۲ + ما^۲)$ کی قیمت چھوٹی سے چھوٹی ہو گی جبکہ بائیں جانب کی دوسری رقم $(لا - ما)^۲$ اپنی چھوٹی سے چھوٹی قیمت صفر اختیار کرے یعنی جبکہ لا = ما

یعنی ا ن = ن ب جو ثابت کرنا تھا۔

امثلہ ۲۰

(۱) ایک دیے ہوئے ثابت نقطہ سے ایک دیے ہوئے ثابت خط تک خطوط کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ ان خطوط میں سے سب سے چھوٹا خط وہ ہے جو دیے ہوئے خط پر عمود ہے۔

(۲) ایک دیے ہوئے نقطہ سے ایک دیے ہوئے دائرہ کے محیط تک کھینچے ہوئے خطوط میں سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے وہ خط ہیں جو دائرہ کے مرکز میں سے گزرتے ہیں۔

(۳) ثابت کرو کہ دائرہ کا بڑے سے بڑا وتر اُس کا قطر ہے۔

(۴) مستقل محیط والے مستطیلوں میں سب سے بڑے رقبہ والا مستطیل مربع ہے۔

(۵) ایک مثلث کا قاعدہ اور راسی زاویہ معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث کا رقبہ اعظم ہو گا جبکہ مثلث متساوی الساقین ہو۔

(۶) مستقل رقبہ والے مستطیلوں میں سب سے چھوٹے احاطہ والا مستطیل مربع ہے۔

(۷) مستقل رقبہ والے مستطیلوں میں سب سے چھوٹے وتر والا مستطیل مربع ہے۔

(۸) ثابت کرو کہ اُن سب مثلثوں میں جن کا قاعدہ اور رقبہ معلوم ہیں مثلث متساوی الساقین کا محیطِ اقل ہے۔

(۹) دو سیدھی پٹریاں ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں اور ایک سیدھی سلاخ ان کے درمیان پھسلتی ہے بتاؤ کہ پھسلنے والی سلاخ کے کس مقام کے لیے پٹریوں اور سلاخ سے بننے والے مثلث کا رقبہ اعظم ہے۔

(۱۰) ثابت کرو کہ ایک دیے ہوئے دائرہ کے اندر بنے ہوئے مثلثوں میں سب سے بڑے رقبہ والا مثلث مساوی الاضلاع ہے۔

(۱۱) ایک پل کی تین کمانیں ہیں جن میں سے ہر ایک کا عرض ۵۰ فٹ ہے بتاؤ کہ پل سے کتنے فاصلہ پر کسی ایک کنارے پر وہ نقطہ ہے جہاں درمیانی کمان کے محاذی اعظم زاویہ بنتا ہے۔ [جواب ۵۰ $\sqrt{2}$ فٹ]

(۱۲) اُن تمام مثلثوں میں جو ایک دیے ہوئے دائرہ کے اندر بن سکتے ہیں مثلث مساوی الاضلاع کا محیط اعظم ہے۔

(۱۳) اُن تمام مثلثوں میں جو ایک مثلث کے اندر بن سکتے ہیں مثلث پائین کا احاطہ اقل ہے۔

(۱۴) ایک مثلث کا قاعدہ اور راسی زاویہ معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث کے باقی دو ضلعوں پر کے مربعوں پر کا مجموعہ اعظم ہوگا جبکہ مثلث متساوی الساقین ہو۔

(۱۵) ایک دائرہ کے باہر دو نقطے ا اور ب ہیں اور دائرہ پر کوئی نقطہ ن ہے ثابت کرو کہ ا ن + ب ن اقل ہوگا جبکہ یہ خطوط ن پر کے مماس کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں۔

(۱۶) مثال بالا کی مدد سے ایک دیے ہوئے مثلث ا ب ج (جس کے سب زاویے حادّہ ہیں) کے اندر ایک نقطہ ن ایسا معلوم کرو کہ ن ا + ن ب + ن ج اقل ہو۔

(۱۷) ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے چاروں ضلعے بلحاظ طول اور ترتیب دیے گئے ہیں ثابت کرو کہ ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ اعظم ہوگا جبکہ ذو اربعۃ الاضلاع مشترک المحیط ہو۔

ساتواں باب

چلیپی نسبت، موسیقی صف، اور موسیقی پنسل

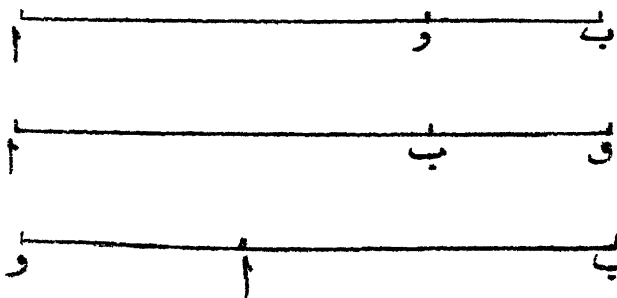
۸۳ - جدید علم ہندسہ میں ایک خطِ مستقیم پر طولوں کی پیمائش میں سمت پیمائش کو بھی ملحوظ رکھا جاتا ہے - اگر ایک سمت میں ناپے ہوئے فاصلوں کو مثبت قرار دیا جائے تو مخالف سمت میں ناپے ہوئے فاصلوں کو منفی قرار دیا جائیگا - پس اگر خط پر ا اور ب دو نقطے ہوں تو ا ب = - ب ا اور ب ا = - ا ب جس سے حاصل ہوتا ہے کہ ا ب + ب ا = ۰
اگر ایک خطِ مستقیم پر تین نقطے ا، ب، ج ہوں تو

ا ب + ب ج = ا ج   اور   ا ب + ب ج + ج ا = ۰

نیز اگر دو نقطوں ا اور ب میں سے گزرنے والے خط پر کوئی نقطہ و ہو تو
و ب - و ا = ا ب

ا ——— و ——— ب

ا ——— ب ——— و

و ——— ا ——— ب

۸۴ ۔ مسئلہ ۔ اگر خط مستقیم کا وسطی نقطہ م ہو اور خط پر کوئی نقطہ و ہو تو ۲ وم = وا + وب

ب م ا و

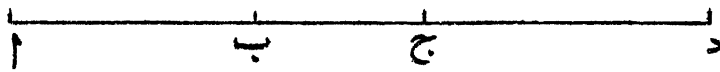
ثبوت ۔ چونکہ ام = م ب

اس لیے وم ـ وا = وب ـ وم

اس لیے ۲ وم = وا + وب

۸۵ ۔ تعریف ۔ متعدد ہم خط نقطوں کو نقطوں کی صف کہتے ہیں ۔

مسئلہ ۔ اگر ا، ب، ج، د چار نقطوں کی ایک صف ہو تو

اب × ج د + ب ج × اد + ج ا × ب د = ۰

ا ب ج د

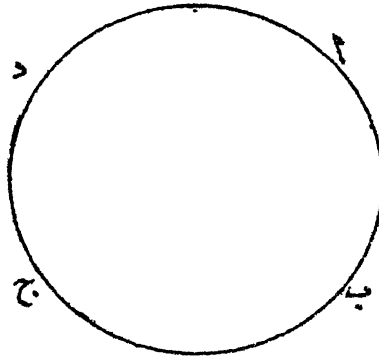
اب × ج د + ب ج × ا د + ج ا × ب د

= اب(اد ـ اج) + (اج ـ اب) اد ـ اج (اد ـ اب) = ۰

نوٹ ۔ یہ مسئلہ درست رہیگا خواہ ا، ب، ج، د ایک خط پر کسی ترتیب میں لیے جائیں ۔

۸۶ ۔ تعریف ۔ اگر ا، ب، ج، د چار نقطوں کی ایک صف ہو تو

نسبت $\frac{\text{اب × ج د}}{\text{اد × ج ب}}$ کو صف ا ب ج د کی چلیپی نسبت کہتے ہیں اور اس کی قیمت کو علامت (ا ب ج د) سے تعبیر کرتے ہیں ۔

نوٹ ۔ صف ا ب ج د کی چلیپی نسبت کو لکھنے اور یاد رکھنے کے لیے ایک دائرہ پر نقاط ا، ب، ج، د کو سلسلہ وار سمت ساعت میں لکھو شمار کنندہ حاصل کرنے کے لیے ا سے شروع کر کے حروف کو سمت ساعت میں لکھو

اور نسب نما حاصل کرنے کے لیے ا سے شروع کرکے حروف کو مخالف سمتِ ساعت میں لکھو۔

۸۷۔ مسئلہ۔ اگر (ا ب ج د) = (ا ب ج ع) تو نقاط د اور ع ایک دوسرے پر منطبق ہونگے۔

چونکہ (ا ب ج د) = (ا ب ج ع)

∴ $\frac{\text{ا ب × ج د}}{\text{ا د × ج ب}} = \frac{\text{ا ب × ج ع}}{\text{ا ع × ج ب}}$

یعنی $\frac{\text{ج د}}{\text{ا د}} = \frac{\text{ج ع}}{\text{ا ع}}$

یعنی $\frac{\text{ج د}}{\text{د ا}} = \frac{\text{ج ع}}{\text{ع ا}}$

یعنی ج ا کی تقسیم ایک ہی نسبت میں نقاط د اور ع پر ہوتی ہے اس لیے ضروری ہے کہ د اور ع ایک دوسرے پر منطبق ہوں۔

امثلہ ۲۱

(۱) ا ب کا وسطی نقطہ ج ہے اور ا ب پر کوئی اَور نقطہ ن ہے، ثابت کرو کہ

(ل) ا ن × ب ن + ج ب^2 = ج ن^2

(ب) ا ب^2 + ب ن^2 = ۲ ا ج^2 + ۲ ج ن^2

(۲) ا ب کا وسطی نقطہ ج ہے اور ا ب ممدودہ پر کوئی نقطہ د ہے ثابت کرو کہ ا ج × ا د = ج ب × ب د + ۲ ب ج^2

(۳) ا، ب، ج، ن کوئی چار ہم خط نقطے ہیں ۔ ثابت کرو کہ

ن ا^2 × ب ج + ن ب^2 × ج ا + ن ج^2 × ا ب + ب ج × ج ا × ا ب = ۰

(۴) اگر (ا ب ج د) = لہ، تو

ثابت کرو کہ (ا ب ج د) کی قیمت نہیں بدلتی جبکہ کسی دو حروف کو باہم بدلا جائے اور ساتھ ہی باقی دو حروف کو بھی باہم بدلا جائے یعنی

(ا ب ج د) = (ب ا د ج) = (ج د ا ب) = (د ج ب ا) = لہ

(۵) ثابت کرو کہ پہلے اور تیسرے حروف کو باہم بدلنے سے یا دوسرے اور چوتھے حروف کو باہم بدلنے سے چلیپی نسبت کی قیمت الٹ جاتی ہے یعنی

(ا د ج ب) = (ب ج د ا) = (ج ب ا د) = (د ا ب ج) = $\frac{۱}{لہ}$

(۶) ثابت کرو کہ دوسرے اور تیسرے حروف کو باہم بدلنے سے یا پہلے اور چوتھے حروف کو باہم بدلنے سے چلیپی نسبت کی قیمت ۱ ۔ لہ ہو جاتی ہے یعنی

(ا ج ب د) = (ب د ا ج) = (ج ا د ب) = (د ب ج ا) = ۱ ۔ لہ

اشارہ ۔ چونکہ ا ب × ج د + ب ج × ا د + ج ا × ب د = ۰

اس لیے $\frac{\text{ا ب × ج د}}{\text{ا د × ج ب}} - ۱ + \frac{\text{ج ا × ب د}}{\text{ا د × ج ب}} = ۰$

اس لیے ۱ ۔ لہ = $\frac{\text{ج ا × ب د}}{\text{ا د × ج ب}} = \frac{\text{ا ج × ب د}}{\text{ا د × ب ج}}$ = (ا ج ب د)

اسی طرح سے باقی کی تین چلیپی نسبتوں کے لیے بھی ۔

(۷) ثابت کرو کہ

(ل) (ا د ب ج) = (ب ج ا د) = (ج ب د ا) = (د ا ج ب) = $\frac{۱}{۱ - لہ}$

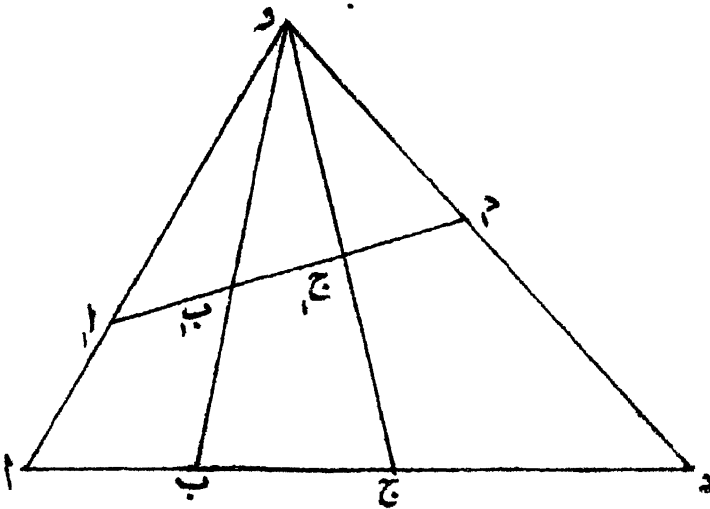
(ب) (ا ب د ج) = (ب ا ج د) = (ج د ب ا) = (د ج ا ب) = ۱ ۔ $\frac{۱}{۱ - لہ}$ = $\frac{لہ}{۱ - لہ}$

(ج) (اج دب) = (ب دج ا) = (ج ا ب د) = (د ب ا ج) = $\frac{ل-۱}{ل}$

(۸) ثابت کرو کہ چار ہم خط نقطوں ا، ب، ج، د کو مختلف ترتیبوں میں لینے سے ۲۴ چلیپی نسبتیں حاصل ہوتی ہیں جن سے چار چار مساوی القیمت چلیپی نسبتوں کے چھ سٹ (Set) بنتے ہیں۔

۸۸ ۔ تعریفات ۔ متعدد متراکز خطوں کو خطوں کی پنسل کہتے ہیں۔ اور پنسل کے ہر خط کو شعاع کہتے ہیں اور پنسل کی شعاعوں کے نقطۂ تراکز کو پنسل کا راس کہتے ہیں۔

پنسل کی شعاعوں کو کاٹنے والے کسی خط کو پنسل کا قاطع کہتے ہیں۔

مسئلہ ۔ اگر چار شعاعوں و ا، و ب، و ج، و د سے بننے والی ایک پنسل کو دو قاطع بالترتیب نقاط ا، ب، ج، د اور ا١، ب١، ج١، د١ پر قطع کریں تو (اب ج د) = (ا١ ب١ ج١ د١)

$$(اب ج د) = \frac{اب \times ج د}{اد \times ج ب} = \frac{\triangle اوب \times \triangle ج و د}{\triangle اود \times \triangle ج وب}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} وا \times وب \times جب\ اوب \times \frac{1}{2} وج \times ود \times جب\ ج و د}{\frac{1}{2} وا \times ود \times جب\ اود \times \frac{1}{2} وج \times وب \times جب\ ج وب}$$

جہاں زاویوں کی علامتوں کو بھی ملحوظ رکھا گیا ہے۔

$$= \frac{\text{جب ا و ب} \times \text{جب ج و د}}{\text{جب ا و د} \times \text{جب ج و ب}}$$

اسی طرح سے $(\text{ا}_1 \text{ب}_1 \text{ج}_1 \text{د}_1) = \frac{\text{جب ا}_1 \text{و ب}_1 \times \text{جب ج}_1 \text{و د}_1}{\text{جب ا}_1 \text{و د}_1 \times \text{جب ج}_1 \text{و ب}_1}$

چونکہ پنسل کے قاطعوں کے تمام مقامات کے لیے

$$\frac{\text{جب ا و ب} \times \text{جب ج و د}}{\text{جب ا و د} \times \text{جب ج و ب}} = \frac{\text{جب ا}_1 \text{و ب}_1 \times \text{جب ج}_1 \text{و د}_1}{\text{جب ا}_1 \text{و د}_1 \times \text{جب ج}_1 \text{و ب}_1}$$

اس لیے ثابت کرو کہ $(\text{ا ب ج د}) = (\text{ا}_1 \text{ب}_1 \text{ج}_1 \text{د}_1)$

نوٹ (۱) یہ طریقہ اُن صورتوں پر بھی حاوی ہے جبکہ قاطع، پنسل کی ایک یا ایک سے زیادہ محدودہ شعاعوں کو قطع کرے۔ قاطع کے مختلف مقامات کے لیے طالب علم مناسب شکلیں کھینچ کر ثبوت بہم پہنچائے۔

نوٹ (۲)۔ مسئلۂ بالا میں یہ ثابت ہوا کہ اگر چار شعاعوں وا، وب، وج، ود سے بننے والی پنسل کو کوئی قاطع نقاط ا، ب، ج، د پر قطع کرے تو صف ا ب ج د کی چلیپی نسبت قاطع کے مقام پر منحصر نہیں ہے بلکہ پنسل کی شعاعوں کے درمیانی زاویوں پر منحصر ہے۔ اس مستقل چلیپی نسبت کو پنسل کی چلیپی نسبت کہتے ہیں اور اُسے علامت و (ا ب ج د) سے تعبیر کرتے ہیں۔

۸۹۔ تعریفات۔ اگر ایک خطِ مستقیم ا ج کی داخلی اور خارجی تقسیم ایک ہی نسبت میں ب اور د پر کی جائے [یعنی اگر $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب ج}} = -\frac{\text{ا د}}{\text{د ج}}$] تو یوں کہا جاتا ہے کہ

ا　　ب　　ج　　د

ا ج کی موسیقی تقسیم ب اور د پر ہوئی ہے (دیکھو دفعہ ۲۱) اور صف ا ب ج د کو موسیقی صف کہتے ہیں نیز نقاط ا اور ج کے لحاظ سے نقاط ب اور د ایک دوسرے کے موسیقی جزدوج کہلاتے ہیں

موسیقی صف ا ب ج د کی چلیپی نسبت $= \frac{\text{ا ب} \times \text{ج د}}{\text{ا د} \times \text{ج ب}}$

$$= \frac{\text{ا ب}}{\text{ب ج}} \div \frac{\text{ا د}}{\text{د ج}} = -1$$

پس صف اب ج د موسیقی صف ہوگی اگر اُس کی چلیپی نسبت (اب ج د) = -۱
یعنی وہ صف جس کی چلیپی نسبت -۱ کے مساوی ہے موسیقی صف ہے ۔
یہ ظاہر کرنے کے لیے کہ ا اور ج کے لحاظ سے ب اور د ایک دوسرے کے موسیقی مزدوج ہیں موسیقی صف اب ج د کو (اج، ب د) = -۱ سے بھی تعبیر کرتے ہیں ۔

۹۰ - مسئلہ - اگر (اج، ب د) = -۱ تو (د ب، ج ا) = -۱

ا ب ج د

از روئے تعریف $\frac{\text{اب}}{\text{ب ج}} = \frac{-\text{اد}}{\text{د ج}}$

اس لیے تبدیل نسبت سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{د ج}}{\text{ب ج}} = -\frac{\text{اد}}{\text{اب}}$$

یعنی $\frac{\text{د ج}}{\text{ج ب}} = -\frac{\text{دا}}{\text{اب}}$

یعنی (د ب، ج ا) = -۱

۹۱ - مسئلہ - اگر (اب ج د) = -۱ تو اب، اج، اد کے طول موسیقی سلسلہ میں ہونگے ۔

چونکہ (اب ج د) = -۱

اس لیے $\frac{\text{اب} \times \text{ج د}}{\text{اد} \times \text{ج ب}} = -۱$

یعنی $\frac{\text{اب} (\text{اد} - \text{اج})}{\text{اد} (\text{اب} - \text{اج})} = -۱$

یعنی اب × اد - اب × اج = - اد × اب + اد × اج

طرفین کو اب × اج × اد پر تقسیم کرنے سے

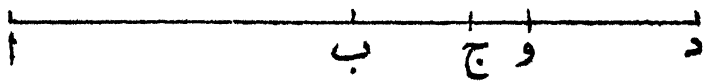
$$\frac{۱}{\text{اج}} - \frac{۱}{\text{اد}} = -\frac{۱}{\text{اج}} + \frac{۱}{\text{اب}}$$

یعنی $\frac{۱}{\text{اب}} - \frac{۱}{\text{اج}} = \frac{۱}{\text{اج}} - \frac{۱}{\text{اد}}$

یعنی $\frac{۱}{\text{اب}}$، $\frac{۱}{\text{اج}}$، $\frac{۱}{\text{اد}}$ سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔

یعنی طول اب، اج، اد موسیقی سلسلہ میں ہیں۔

۹۲۔ مسئلہ۔ اگر (اج، ب د) = -۱ اور ب د کا وسطی نقطہ و ہو تو وا × وج = وب^۲

ا ب ج و د

چونکہ (اج، ب د) = -۱

اس لیے $\frac{\text{اب}}{\text{بج}} = -\frac{\text{اد}}{\text{دج}}$

یعنی $\frac{\text{وب} - \text{وا}}{\text{وج} - \text{وب}} = -\frac{\text{ود} - \text{وا}}{\text{وج} - \text{ود}}$

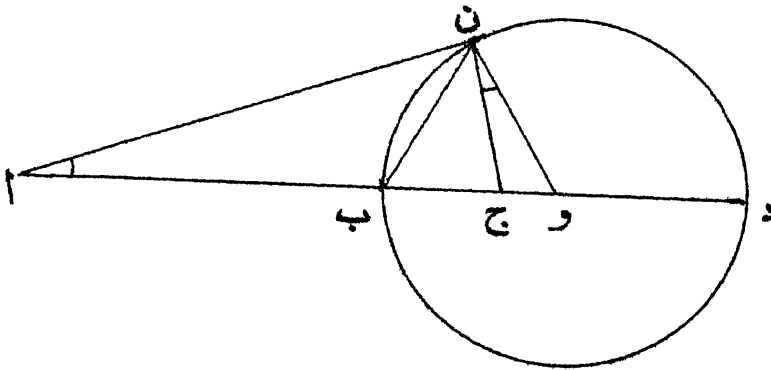
یعنی $\frac{\text{وب} - \text{وا}}{\text{وج} - \text{وب}} = \frac{\text{وب} + \text{وا}}{\text{وج} + \text{وب}}$ کیونکہ ود = - وب

یعنی $\frac{\text{وج} + \text{وب}}{\text{وج} - \text{وب}} = \frac{\text{وب} + \text{وا}}{\text{وب} - \text{وا}}$ (تبدیل نسبت)

یعنی $\frac{\text{وج}}{\text{وب}} = \frac{\text{وب}}{\text{وا}}$ (ترکیب و تفصیل نسبت)

یعنی وا × وج = وب^۲

۹۳۔ مسئلہ۔ اگر (اج، ب د) = -۱ اور قطر ب د پر کھنچے ہوئے دائرہ پر کوئی نقطہ ن ہو تو $\frac{\text{ان}}{\text{نج}} = \frac{\text{اب}}{\text{بج}}$

فرض کرو کہ ب د کا وسطی نقطہ و ہے
ن ا، ن ب، ن ج، ن د کو ملاؤ

سابقہ مسئلہ کی رو سے

و ا × و ج = و ب^۲

= و ن^۲

یعنی و ن مماس ہے △ ا ن ج کے حائط دائرہ کا

یعنی ∠ و ن ج = ∠ ن ا ب .... (۱)

چونکہ و ب = و ن

اس لیے ∠ و ن ب = ∠ د ب ن

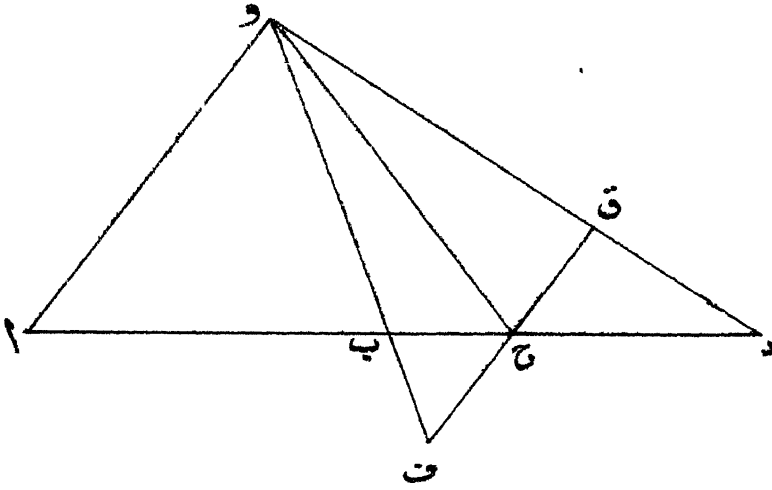
یعنی ∠ و ن ج + ∠ ج ن ب = ∠ ن ا ب + ∠ ا ن ب ..... (۲)

(۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے

∠ ج ن ب = ∠ ا ن ب

یعنی ن ب داخلی منصف ہے ∠ ا ن ج کا

اس لیے ن ا / ن ج = ا ب / ب ج یہی ثابت کرنا تھا۔

۹۴ - مسئلہ - اب ج د ایک موسیقی صف ہے، اس کے باہر کوئی نقطہ و ہے - اگر ج میں سے ایک خط ف ج ق خط و ا کے متوازی کھینچا جائے جو و ب سے ف پر اور و د سے ق پر ملے تو ف ج = ج ق -

تشابہ مثلثوں اب و اور ج ب ف میں

$$\frac{\text{اب}}{\text{ب ج}} = \frac{\text{ا و}}{\text{ف ج}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۱)$$

نیز متشابہ مثلثوں ا د و اور ج د ق میں

$$\frac{\text{ا د}}{\text{ج د}} = \frac{\text{ا و}}{\text{ج ق}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۲)$$

لیکن چونکہ ا ب ج د موسیقی صف ہے

اس لیے $\frac{\text{اب}}{\text{ب ج}} = \frac{\text{ا د}}{\text{ج د}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۳)$

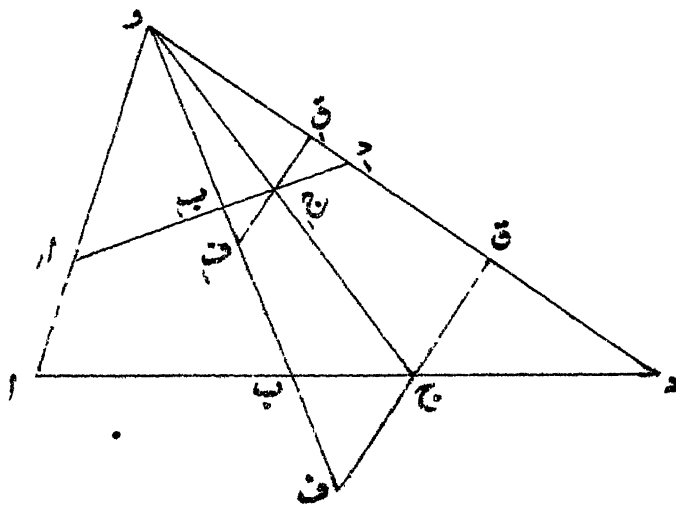
نتائج (۱)، (۲)، (۳) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{ا د}{ف ج} = \frac{ا د}{ج ق}$$

اس لیے ف ج = ج ق

عکس - اگر ا ب ج د ایک صف ہو اور اس کے باہر ایک نقطہ و ہو اور ج سے و ا کے متوازی ایک خط ف ج ق کھینچا جائے جو و ب سے ف پر اور و د سے ق پر ملے اور اگر ف ج = ج ق تو ا ب ج د ایک موسیقی صف ہوگی۔

اس مسئلہ کا ثبوت اوپر کے مسئلہ کے ثبوت کے استدلال کو اُلٹنے سے طالب علم خود حاصل کرے۔

۹۵ - مسئلہ - اگر ا ب ج د ایک موسیقی صف ہو اور اُس کے باہر کوئی نقطہ و ہو تو و ا، و ب، و ج، و د ہر قاطع کو ایک موسیقی صف پر قطع کریں گے۔

فرض کرو کہ کوئی دوسرا قاطع خطوط د ا، د ب، د ج، د د کو بالترتیب نقاط ا، ب، ج، د پر قطع کرتا ہے۔

نقاط ج اور ج میں سے خطوط ف ج ق اور ف ج ق خط د ا کے متوازی کھینچو۔

چونکہ (ا ب ج د) ایک موسیقی صف ہے اس لیے ف ج = ج ق

اس لیے ف ج = ج ق

اور دفعہ گزشتہ کے مسئلہ کے عکس سے حاصل ہوتا ہے کہ ا ب ج د ایک موسیقی صف ہے۔

تعریفات ۔ اگر پنسل و (ا ب ج د) ایسی ہو کہ اُس کے ایک مخصوص قاطع (اور اس لیے مسئلۂ بالا کی رُو سے اس کے ہر قاطع پر) ایک موسیقی صف حاصل ہوتی ہو تو ایسی پنسل کو موسیقی پنسل کہتے ہیں ۔ اور شعاعوں و ب، و د کو بلحاظ شعاعوں و ا، و ج کے ایک دُوسرے کی موسیقی مزدوج شعاعیں کہتے ہیں۔

نوٹ (۱)۔ گزشتہ ترقیم کے اصول پر موسیقی پنسل و (ا ب ج د) کو اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

و (ا ب، ج د) = -۱ یا و (ا ج، ب د) = -۱

نوٹ (۲)۔ دفعہ ۸۸ کے مسئلہ کی رُو سے (ا ب ج د) = (ا ب ج د)

اور چونکہ حسب مفروض (ا ب ج د) = -۱ اس لیے ثابت ہوا کہ (ا ب ج د) = -۱

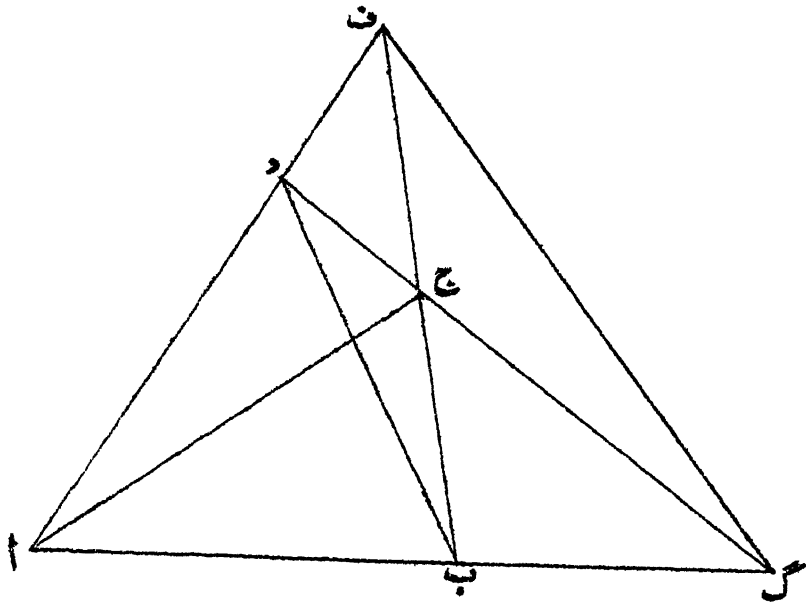
یہ مسئلۂ بالا کا متبادل ثبوت ہے۔

تعریفات ۔ ایسے چار خطوطِ مستقیم کے نظام کو، جن میں سے کوئی تین متراکز نہیں ہیں، مکمل ذوار بعۃ الاضلاع کہتے ہیں۔

یہ چار خطوط مکمل ذوار بعۃ الاضلاع کے ضلعے کہلاتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک مکمل ذوار بعۃ الاضلاع کے ضلعے ا ب، ب ج، ج د، د ا ہیں۔

نیز فرض کرو کہ ا ب اور ج د کا نقطۂ تقاطع گ ہے اور ا د اور ب ج کا نقطۂ تقاطع ف ہے ۔ پس مکمل ذوار بعۃ الاضلاع کے ضلعوں میں سے دو، دو کے تقاطع سے چھ نقطے ا، ب، ج، د، ف، گ حاصل ہوتے ہیں۔ اِن نقطوں کو

مکمل ذو اربعۃ الاضلاع کے چھ راُس کہتے ہیں ۔

مقابل کے راُسوں کو ملانے والے تین خطوط یعنی اج، ب د اور ف گ کو مکمل ذو اربعۃ الاضلاع کے تین قطر کہتے ہیں ۔

۹۷۔ مسئلہ۔ مکمل ذو اربعۃ الاضلاع کے کوئی دو قطر تیسرے قطر کی موسیقی تقسیم کرتے ہیں۔

دفعہ گزشتہ کی ترقیم کے مطابق مکمل ذو اربعۃ الاضلاع کے قطر اج، ب د اور ف گ ہیں۔

فرض کرو کہ قطر اج کو دوسرے دو قطر ب د اور ف گ بالترتیب نقاط لا اور ما پر قطع کرتے ہیں ۔

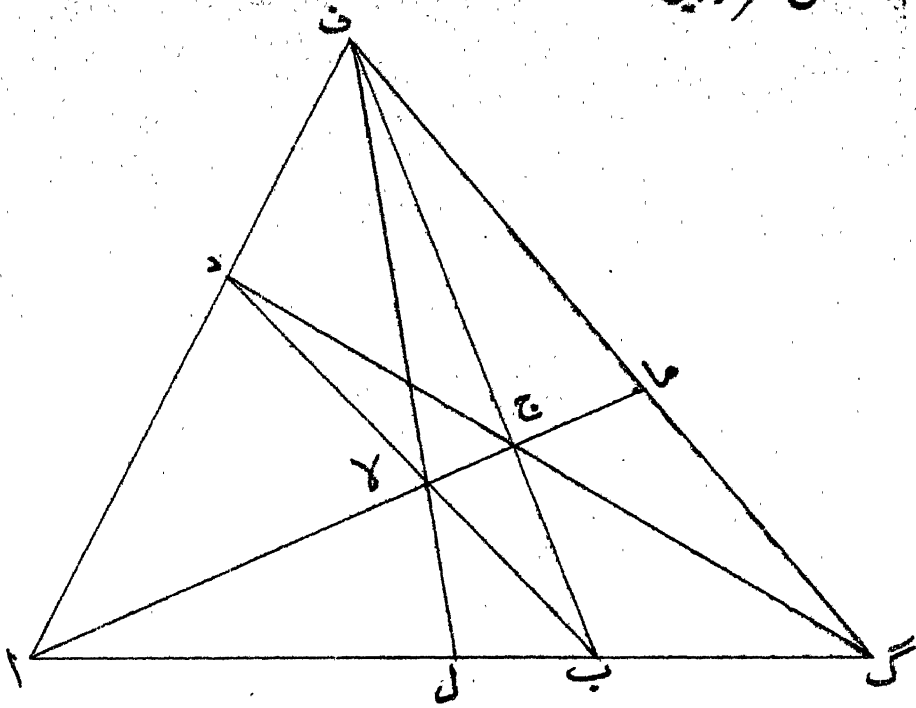
ثابت کرنا ہے کہ ا لا ج ما موسیقی صف ہے ۔

فرض کرو کہ ف لا اور ا ب کا نقطۂ تقاطع ل ہے ۔

مثلث ف ا ب کے راُسوں سے گزرنے والے خط اج، ب د

اور ف ل متراکز ہیں۔

اس لیے سیوا کے مسئلہ سے

$$\frac{\text{ا ل}}{\text{ل ب}} \times \frac{\text{ب ج}}{\text{ج ف}} \times \frac{\text{ف د}}{\text{د ا}} = +1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

نیز مثلث ف ا ب کے ضلعوں پر کے تین نقطے گ، ج، د ہم خط ہیں۔
اس لیے مینی لاس کے مسئلہ سے

$$\frac{\text{ا گ}}{\text{گ ب}} \times \frac{\text{ب ج}}{\text{ج ف}} \times \frac{\text{ف د}}{\text{د ا}} = -1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

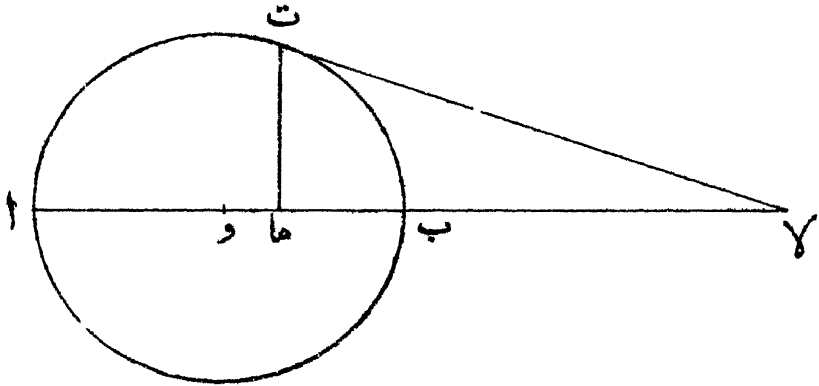
نتائج (۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{ا ل}}{\text{ل ب}} = -\frac{\text{ا گ}}{\text{گ ب}}$$

یعنی ا ل ب گ موسیقی صف ہے

اِس لیے پنسل ف (ال ب گ) موسیقی پنسل ہے۔
اس لیے اِس پنسل کے قاطع ا ما پر موسیقی صف ا لا ج ما حاصل ہوتی ہے،
پس ثابت ہوا کہ مکمل ذوالربعۃ الاضلاع کے قطر ب د اور ف گ تیسرے قطر
ا ج کی موسیقی تقسیم کرتے ہیں۔
اسی طرح سے دُوسرے دو قطروں ب د اور ف گ کے لیے بھی مسئلہ
ثابت ہو سکتا ہے۔

امثلہ ۲۲

(۱) خط ا ب کا وسطی نقطہ لا ہے، ا اور ب کے لحاظ سے نقطہ لا کا
موسیقی مزدوج کہاں ہے؟
(۲) مثلث ا ب ج کے زاویہ ا کے مُنصِف ا لا اور ا ما ہیں۔
ثابت کرو کہ ا (ب لا ج ما) موسیقی پنسل ہے۔
(۳) مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ کا ایک قطر ف ق ضلع ب ج
پر عمود وار ہے ثابت کرو کہ ا (ق ب ف ج) موسیقی پنسل ہے۔
(۴) ا اور ب دو ثابت نقطے ہیں، ج د کوئی خط ہے جو ا ب کے
متوازی نہیں ہے ج د پر ایک نقطہ ن ایسا معلوم کرو کہ < ا ن ب کا
ایک مُنصِف خط ج د ہو۔
(۵) ا ب ج ایک مثلث ہے اور ن ایک ثابت نقطہ ہے جو
مثلث کے اضلاع پر نہیں ہے۔ ن میں سے ایک خط کھینچو جو مثلث کے اضلاع
ا ب، ب ج، ج ا سے ایسے نقاط ف، ق، ر پر ملے کہ (ن ف ق ر) = -۱
(۶) ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے، ب د کے متوازی ا ع
کھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ ا (ب د، ج ع) = -۱
(۷) ایک دائرہ کے قطر ا ب ممدودہ پر کے کسی نقطۂ لا سے دائرہ کا
ایک مماس لا ت کھینچا گیا ہے اور ت سے ا ب پر عمود ت ما ہے۔

ثابت کرو کہ لا ا اور لا ب کا حسابی اوسط لا و ہے، ہندسی اوسط لا ت ہے اور موسیقی اوسط لا ما ہے۔

(۸) شکل بالا میں ثابت کرو کہ (اب، مالا) = -۱

(۹) شکل بالا میں اگر لا سے گزرنے والا کوئی خط دائرہ د سے ف اور ق پر اور ت ما سے ن پر ملے تو ثابت کرو کہ لا ف ن ق موسیقی صف ہے۔

(۱۰) دو دائرے (د۱) اور (د۲) ایک دوسرے کو عمود وار قطع کرتے ہیں۔ اگر دائرہ (د۱) کا کوئی قطر اب دائرہ (د۲) سے ف اور ق پر ملے تو ثابت کرو کہ (اب، ف ق) = -۱

(۱۱) و (اب ج د) موسیقی پنسل ہے۔ اگر ∠ ا و ج قائمہ ہو تو دفعہ ۹۴ کی مدد سے ثابت کرو کہ ∠ ب و د کے منصّف و ا، و ج ہیں۔ [مقابلہ کرو دفعہ ۹۳ کے ساتھ]

(۱۲) ایک خط پر تین نقطے ا، ب، ج دیے گئے ہیں صرف پٹری کو استعمال کرنے سے دفعہ ۹۷ کی مدد سے اسی خط پر نقطہ د ایسا معلوم کرو کہ (اب ج د) = -۱

(۱۳) و ا، و ب، و ج تین دیے ہوئے خط ہیں۔ خط و د

ایسا کھینچو کہ و (اب ج د) = -۱

(۱۴) دو دائرے ایک دوسرے کو ب اور ج پر قطع کرتے ہیں اور ان دائروں کا ایک مشترک مماس دائروں کو ف اور ق پر مس کرتا ہے ب اور ج میں سے گزرنے والا کوئی دائرہ خط ف ق سے ل اور م پر ملتا ہے ثابت کرو کہ (ف ق، ل م) = -۱

اغلاط نامہ

علم ہندسۂ مستوی

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۷	۸	سکتی۔	سکتی	۶۴	۱۴	ہاس	راس
۸	۲۰	دریی	درسی	۶۶	۱۰	(بَ+ج)۲	(بَ + جَ)۲
۱۲	پیشانی	ہندسہ مستو۔	ہندسۂ مستوی	۸۳	۲۵	رَ۲	ر۲
۳۱	۱۰	۵ / ۷	۵ و ۷	۹۳	۱۳	آقلیب	تقلیب
۳۵	شکل	ج۱	ج۲	۹۷	۱۱	نقط	نقطہ
۳۹	۱۲	قستم	قسم	۱۰۲	۶	(م۲)	(م۳)
۳۹	۲۰	تناکر	تناظر	۱۰۹	۹	خطوۂ	خطوط
۴۹	۳	ب۱۲	ب۱	۱۱۱	۹	بس	مَس
〃	۴	د۲ع۱	د۱ ع۱	۱۱۳	۱۰	مقداہ	مقدار
۵۳	شکل	عند	۴	۱۲۲	۱۶	حاذہ	حادہ
۶۰	۲	ہے	سے	۱۲۷	۶	رأس	رأس
۶۱	شکل	شکل میں خط ا د واضح نہیں ہے		۱۳۳	شکل کے اندر	ج	جَ۱
۶۲	۵	ا د۳	ا د۲	۱۳۴	۱۶	(م۲	(د۱

غلط نامہ

علم ہندسۂ مستوی

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۷	۸	سکتی۔	سکتی	۶۴	۱۲	بلاس	راس
۸	۲۰	درسی	درسی	۶۶	۱۰	(بَ+ج)۲	(بَ+جَ)۲
۱۲	پیشانی	ہندسہ مستو۔	ہندسۂ مستوی	۸۳	۲۵	رٗ	ر۲
۳۱	۱۰	۵ / ۷	۵ ی ۷	۹۳	۱۳	آقلیب	تقلیب
۳۵	شکل	ج۱	ج۲	۹۷	۱۶	نقظ	نقطہ
۳۹	۱۲	قتم	قسم	۱۰۲	۶	(ق۳)	(ق۳)
۳۹	۲۰	تناگر	تناظر	۱۰۹	۹	خطوہ	خطوط
۴۹	۳	ب۱	ب۱	۱۱۱	۹	بس	مَس
″	۴	د۲ع۱	د۱ع۱	۱۱۳	۱۰	مقدار۔	مقدار
۵۳	شکل	عند	ع۴	۱۲۳	۱۶	حادہ	حادّہ
۶۰	۲	ہے	سے	۱۲۷	۶	رأس	رأس
۶۱	شکل	شکل میں خط ا د واضح نہیں ہے		۱۳۳	شکل کے اندر	ج	جَ
۶۴	۵	ا د۳	ا د۲	۱۳۴	۱۶	(د۲)	(د۱)

اغلاط نامہ

علم ہندسۂ مستوی

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۷	۸	سکتی۔	سکتی	۶۴	۱۲	ہلس	راس
۸	۲۰	درسی	درسی	۶۶	۱۰	(ب+ج)۲	(ب + ج)۲
۱۲	پیشانی	ہندسۂ مستو۔	ہندسۂ مستوی	۸۳	۲۵	ر۲	ر۲
۳۱	۱۰	۵/۷	۵ر۷	۹۳	۱۳	آقلیب	تقلیب
۳۵	شکل	ج۱	ج۲	۹۷	۱۶	نقط	نقطہ
۳۹	۱۲	قسم	قسم	۱۰۲	۶	(ق م)	(ق م)
۳۹	۲۰	تناظر	تناظر	۱۰۹	۹	خطوۂ	خطوط
۴۹	۳	ب۲	ب۱	۱۱۱	۹	بس	مَس
"	۴	د ع۱	د۱ ع۱	۱۱۳	۱۰	مقدام	مقدار
۵۳	شکل	عند	۴	۱۲۲	۱۶	حاذہ	حادّہ
۶۰	۲	ہے	سے	۱۲۷	۶	رأس	رأس
۶۱	شکل	شکل میں خط ا د واضح نہیں ہے		۱۳۳	شکل کے اندر	ج	ج۲
۶۴	۵	ا د۲	ا د۲	۱۳۴	۱۶	(م۲)	(م۱)

اغلاط نامہ

علم ہندسۂ مستوی

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۷	۸	سکتی۔	سکتی	۶۴	۱۲	بلاس	راس
۸	۲۰	درسی	درسی	۶۶	۱۰	(ب+ج)^۲	(ب + ج)^۲
۱۲	پیشانی	ہندسہ مستو۔	ہندسۂ مستوی	۸۳	۲۵	ر^۲	ر^۲
۳۱	۱۰	۵ / ۷	۵ ک ۷	۹۳	۱۳	آقلیب	تقلیب
۳۵	شکل	ج۱	ج۲	۹۷	۱۱	نقط	نقطہ
۳۹	۱۲	قسم	قسم	۱۰۲	۲	(ق م)	(ق م)
۳۹	۲۰	تناظر	تناظر	۱۰۹	۹	خطوط	خطوط
۴۹	۳	ب۱	ب۱	۱۱۱	۹	بس	مَس
؍؍	۴	د ع۱	د ع۱	۱۱۳	۱۰	مقدار۔	مقدار
۵۳	شکل	عند	۴	۱۲۲	۱۶	حادہ	حادّہ
۶۰	۲	ہے	سے	۱۲۷	۲	رأس	رأس
۶۱	شکل	شکل میں خط ا د واضح نہیں ہے		۱۳۳	شکل کے اندر	ج	ج
۶۴	۵	ا د^۳	ا د^۲	۱۳۴	۱۲	(د م)	(د م)